Der Banachsche Fixpunktsatz und der Satz von Picard-Lindelöf.

Vorlesung für begabte Schüler

Pascal Hitzler, Frithjof Lutscher

Department of Mathematics, University College Cork, Ireland;
Fakultät für Mathematik, Universität Tübingen, Deutschland

Der Begabtenförderungs-Workshop 1998 fand unter der Leitung von R. Bödi und P. Hitzler vom 14. bis 21. März 1998 an der Universität Tübingen statt. Teilnehmer waren 15 von 24 Schülern des Intensivkurses Mathematik 1997 in Donaueschingen, und der Workshop war auf Anfrage dieser Schüler ins Leben gerufen worden. In diesem Rahmen hielten die Autoren eine Einheit, die sechs Doppelstunden Vorlesung und sechs Doppelstunden Übungen umfasste. Die Inhalte dieser Einheit werden in diesem Kapitel vorgestellt. Durch vorhergehende Teilnahme an Begabtenförderungskursen waren die Hörer, Gymnasiasten der 12. oder 13. Jahrgangsstufe, bereits an streng formale Vorgehensweisen gewöhnt. Die Vorlesung konnte somit den Stoff in sehr dichter Form vermitteln.

Teil 1 vermittelt in kompakter Form Grundbegriffe, die zum Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes benötigt werden: Normierte Vektorräume, Konvergenz, Stetigkeit, Cauchyfolgen, Vollständigkeit. Anschliessend wird der Banachsche Fixpunktsatz bewiesen. Außerdem wird gezeigt, daß der Raum aller stetigen Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall ein Banachraum bezüglich der Maximumsnorm ist. In Teil 2 werden Differentialgleichungen anhand von Beispielen aus der Biologie motiviert und eingeführt. Der Satz von Picard-Lindelöf wird bewiesen und auf die Fragestellungen angewandt.

Das vorliegende Skript ist als Vorlage für ähnliche Fördermassnahmen gedacht und erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Die gestellten „Aufgaben“ sind zum Teil als Diskussionsgrundlagen zu verwenden.

1 Der Banachsche Fixpunktsatz

1.1 Normierte Vektorräume

Definition 1.1 (Gruppe) Sei G eine Menge und $\circ$ ein binärer Operator auf G, d.h. eine Funktion $G \times G \to G$. Dann heißt $(G, \circ)$ eine *kommutative* oder *abelsche Gruppe*, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(G1) Für alle $a, b, c \in G$ gilt $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (*Assoziativität*).

(G2) Es existiert $e \in G$ so daß für alle $a \in G$ gilt: $e \circ a = a \circ e = a$. e heißt das *neutrale Element* der Gruppe.

(G3) Zu jedem $a \in G$ existiert ein Element $a^{-1} \in G$ mit $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$. Das Element a^{-1} heißt das zu a *inverse* Element.

(AB) Für alle $a, b \in G$ gilt $a \circ b = b \circ a$ (*Kommutativität*).

Bezeichnet man die Operation in einer Gruppe mit $+$, so man diese *Addition*. Für jedes Element $a \in G$ wird dann dessen additives Inverses mit $-a$ bezeichnet. Man schreibt auch $a - b$ statt $a + (-b)$. Das neutrale Element wird in diesem Fall üblicherweise mit 0 bezeichnet.

Aufgabe 1 Zeige, daß jede Gruppe genau ein neutrales Element besitzt. Zeige, daß zu jedem Element a in einer Gruppe genau ein inverses Element existiert.

Aufgabe 2 Sind $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ Gruppen?

Aufgabe 3 Für $p \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{K}_p$ die Menge $\{0, 1, \ldots, p-1\}$, wobei p eine Primzahl sei. Beschreibe Operatoren auf $\mathbb{K}_p$ bzw. $\mathbb{K}_p \setminus \{0\}$, durch die diese Menge zu einer kommutativen Gruppe wird. Geht das auch, falls p keine Primzahl ist?

Aufgabe 4 Es bezeichne $\mathbf{C}[a, b]$ die Menge aller stetigen Funktionen vom abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Definiere eine Operation auf $\mathbf{C}[a, b]$, durch die diese Menge zu einer Gruppe wird.

Aufgabe 5 Betrachte die Menge $\mathrm{M}(n, n)$ aller $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$. Ist diese eine (kommutative) Gruppe bezüglich Addition bzw. Multiplikation?

Definition 1.2 (Vektorraum) Seien V eine Menge und $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ zwei binäre Operatoren. V heißt ein *Vektorraum über* $\mathbb{R}$, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(V1) $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe.

(V2) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, v, w \in V$ gilt $\lambda \cdot (v + w) = \lambda v + \lambda w$ und $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda v + \mu v$ (*Distributivität*).

(V3) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$ gilt $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ (*Assoziativität*).

(V4) Für alle $v \in V$ gilt $1 \cdot v = v$.

Konventionen für Klammern werden von den reellen Zahlen übernommen.

Aufgabe 6 Mache $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{C}[a, b]$ und $\mathrm{M}(n, n)$ zu Vektorräumen.

Definition 1.3 (Norm) Eine *Norm* auf einem Vektorraum V über $\mathbb{R}$ ist eine Funktion $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$ die folgende Axiome erfüllt:

(N1) Für alle $v \in V$ ist $||v|| \geq 0$, und es ist $||v|| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.

(N2) Für alle $\lambda \in \mathbb{K}, v \in V$ gilt $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$.

(N3) Für alle $v, w \in V$ gilt $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ (*Dreiecksungleichung*).

Aufgabe 7 Sei V ein normierter Vektorraum. Für alle $a, b, c \in V$ gilt dann $||a - b|| \leq ||a - c|| + ||c - b||$.

Aufgabe 8 Versehe die Vektorräume aus Aufgabe 6 mit geeigneten Normen.

Aufgabe 9 Betrachte verschiedene Normen auf $\mathbb{R}^2$. Zeichne für jede dieser Normen die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$.

Aufgabe 10 Zeige, daß auf $\mathbf{C}[a,b]$ durch $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx$ eine Norm definiert ist.

1.2 Konvergenz und Stetigkeit

Definition 1.4 (Konvergenz) Eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent* mit *Grenzwert* v wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $\|v_n - v\| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ ist. Wir schreiben dann $v_n \to v$ beziehungsweise $\lim v_n = v$.

Proposition 1.5 Grenzwerte von Folgen in normierten Vektorräumen sind eindeutig.

Beweis: Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum V, $v_n \to v$ und $v_n \to w$. Dann ist $\|v - w\| \leq \|v - v_n\| + \|v_n - w\| \to 0$ für $n \to \infty$ und deshalb $v = w$. ■

Definition 1.6 (punktweise Konvergenz) Seien V ein normierter Vektorraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen von V nach V. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise* nach $f : V \to V$, wenn $(f_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $v \in V$ gegen $f(v)$ konvergiert.

Definition 1.7 (Stetigkeit) Seien V, W zwei normierte Vektorräume. Eine Funktion $f : V \to W$ heißt *stetig*, wenn für jede Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert v auch die Folge $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und Grenzwert $f(v)$ hat.

Aufgabe 11 Was kann man über Graphen reellwertiger stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$ aussagen?

Aufgabe 12 Betrachte die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ mit $f_n(x) = x^n$. Gegen welche Funktion konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise? Ist diese Funktion stetig? Wie muß eine Funktionenfolge in $\mathbf{C}[a,b]$ konvergieren, damit auch die Grenzwertfunktion stetig ist?

Aufgabe 13 Zeige, daß jede konvergente Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ *beschränkt* ist, das heißt, daß eine reelle Zahl r existiert mit $|a_n| \leq r$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt dies auch für beliebige Vektorräume?

Definition 1.8 (gleichmäßige Konvergenz) Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $X \subseteq \mathbb{R}$ konvergiert *gleichmäßig* auf X gegen f, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in X$ stets $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ist.

Proposition 1.9 Jede gleichmäßig konvergente Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ stetiger reeller Funktionen konvergiert gegen eine stetige Funktion f.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert a. Wir müssen zeigen, daß die Folge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz von (f_m) ein $m_0 \in \mathbb{N}$ so daß für alle $x \in \mathbb{R}$ stets $|f(x) - f_{m_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ist. Da f_{m_0} stetig ist existiert außerdem ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß $|f_{m_0}(a_n) - f_{m_0}(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n \geq n_0$ ist. Daraus folgt nun für alle $n \geq n_0$

$$|f(a_n) - f(a)| \leq |f(a_n) - f_{m_0}(a_n)| + |f_{m_0}(a_n) - f_{m_0}(a)| + |f_{m_0}(a) - f(a)| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

■

Proposition 1.10 Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ hat eine monotone Teilfolge.

Beweis: Wir nennen m eine *Gipfelstelle* von (a_n), wenn für $n > m$ stets $a_n < a_m$ ist. Besitzt (a_n) unendlich viele Gipfelstellen $m_1, m_2, \ldots$, so ist $(a_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine fallende Teilfolge von (a_n). Gibt es nur endlich viele Gipfelstellen, so existiert ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$, der größer als alle Gipfelstellen und somit selbst keine Gipfelstelle ist. Deshalb existiert ein $n_1 > n_0$ mit $a_{n_1} \geq a_{n_0}$. Da auch n_1 keine Gipfelstelle sein kann, muß es ein $n_2 > n_1$ mit $a_{n_2} \geq a_{n_1}$ geben. So fortfahrend erhält man eine wachsende Teilfolge. ■

Proposition 1.11 Jede monotone und beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent.

Beweis: OBdA sei (a_n) eine beschränkte und monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}$. Sei a die kleinste obere Schranke von (a_n), das heißt die kleinste reelle Zahl, so daß $a_n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir zeigen, daß die Folge (a_n) gegen a konvergiert.

Angenommen, (a_n) konvergiere nicht gegen a. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n_1 > n_0$ existiert mit $|a - a_{n_1}| \geq \varepsilon$. Da (a_n) monoton wachsend ist, heißt das, daß $|a - a_n| \geq \varepsilon$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist aber $a - \varepsilon$ eine obere Schranke von (a_n) und deshalb a nicht die kleinste obere Schranke im Widerspruch zur Wahl von a. ■

Proposition 1.12 Sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a, b]$ mit Grenzwert $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $c \in [a, b]$.

Beweis: Angenommen, $c \notin [a, b]$. Wir betrachten den Fall $c > b$, wobei der Beweis für $c < a$ analog ist. Sei also $c = b + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$. Dann ist aber $|a_n - c| \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und deshalb konvergiert (a_n) nicht gegen c im Widerspruch zur Annahme. ■

Proposition 1.13 Jede Funktion $f \in \mathbf{C}[a, b]$ nimmt ein Maximum an.

Beweis: Sei $f \in \mathbf{C}[a, b]$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(1) $f(x)$ ist unbeschränkt auf $[a, b]$. Dann existiert eine Folge (a_n) in $[a, b]$, so daß die Folge $(f(a_n))$ monoton wachsend und unbeschränkt ist. Aus Proposition 1.10 folgt nun, daß (a_n) eine monotone Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ enthält, welche nach Proposition 1.11 konvergiert, sagen wir gegen c. Nach Proposition 1.12 ist $c \in [a, b]$. Aufgrund der Stetigkeit von f ist nun die Folge $f(a_{n_k})$ konvergent mit Grenzwert $f(c)$. Nach Aufgabe 13 ist daher die Folge $f(a_{n_k})$ beschränkt im Widerspruch zur Annahme.

(2) $f(x)$ ist beschränkt auf $[a, b]$. Dann existiert eine Folge (a_n) in $[a, b]$, so daß die Folge $(f(a_n))$ monoton wachsend ist und gegen $\sup_{x\in[a,b]} f(x)$ konvergiert. Mit derselben Argumentation wie unter (1) existiert eine monotone Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit Grenzwert $c \in [a, b]$. Aufgrund der Stetigkeit von f folgt $f(c) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. ■

Aufgabe 14 Definiere ausgehend von Proposition 1.13 eine Norm, die *Maximumsnorm* auf $\mathbf{C}[a, b]$ und zeige: Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbf{C}[a, b]$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen ein $f \in \mathbf{C}[a, b]$, wenn sie bezüglich der Maximumsnorm gegen f konvergiert.

Aufgabe 15 Ist es möglich, Konvergenz von Folgen zu definieren, ohne dabei den Grenzwert der jeweiligen Folge zu verwenden?

1.3 Cauchyfolgen und Vollständigkeit

Definition 1.14 (Cauchyfolge) Eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem normierten Vektorraum V heißt eine *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n, m \geq n_0$ stets $\|v_m - v_n\| < \varepsilon$ ist.

Proposition 1.15 Jede konvergente Folge in einem normierten Vektorraum V ist eine Cauchyfolge.

Beweis: Sei (a_n) eine Folge in V mit Grenzwert a. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\|a_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Für alle $n, m \geq n_0$ ist dann $\|a_n - a_m\| \leq \|a_n - a\| + \|a - a_m\| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ■

Definition 1.16 (Vollständigkeit) Ein normierter Vektorraum V heißt *vollständig,* oder ein *Banachraum*, wenn jede Cauchyfolge in V konvergiert.

Aufgabe 16 Ist $\mathbb{Q}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ vollständig?

Aufgabe 17 Betrachte $\mathbf{C}[a, b]$ mit der Norm $\|\cdot\|_1$ aus Aufgabe 10. Ist dieser Raum vollständig?

Proposition 1.17 Der Raum $\mathbf{C}[a, b]$ ist ein Banachraum bezüglich der *Maximumsnorm*

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Beweis: Sei (f_n) eine Cauchyfolge in $\mathbf{C}[a, b]$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $m, n \geq n_0$ und alle $x \in [a, b]$ stets $(*)$ $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ ist. Für jedes $x \in [a, b]$ ist daher $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und konvergiert gegen ein $f(x) \in \mathbb{R}$. Durch Grenzwertbetrachtung $m \to \infty$ in $(*)$ erhält man $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a, b]$ und alle $n \geq n_0$. Deshalb konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig gegen die Funktion f. Nach Proposition 1.9 ist f stetig. ■

1.4 Der Banachsche Fixpunktsatz

Definition 1.18 (Kontraktion) Sei V ein normierter Vektorraum. Eine Funktion $f : V \to V$ heißt *kontrahierend* mit *Kontraktionskonstante* λ, $0 \leq \lambda < 1$, wenn $\|f(v) - f(w)\| \leq \lambda\|v - w\|$ für alle $v, w \in V$ ist.

Aufgabe 18 Betrachte Funktionen auf $\mathbb{R}$. Was für Eigenschaften haben Kontraktionen?

Aufgabe 19 Wir definieren rekursiv für alle $x \in V$: $f^0(x) = x$ und $f^{n+1}(x) := f(f(x))$. Zeige durch vollständige Indukion:

(a) Für jede kontrahierende Abbildung $f : V \to V$ und alle $x, y \in V$ gilt $\|f^n(x) - f^n(y)\| \leq \lambda^n\|x - y\|$.

(b) Für alle $x \in V$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\|x - f^n(x)\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \|f^i(x) - f^{i+1}(x)\|$.

Aufgabe 20 Zeige durch vollständige Induktion, daß für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ stets

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

ist.

Proposition 1.19 Jede kontrahierende Abbildung ist stetig.

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus der Beobachtung, daß für jede konvergente Folge (a_n) mit Grenzwert a stets $\|f(a_n) - f(a)\| < \|a_n - a\|$ gilt. ■

Satz 1.20 (Banachscher Fixpunktsatz) Eine kontrahierende Abbildung f eines Banachraumes V in sich besitzt genau einen Fixpunkt, das heißt es existiert genau ein $v \in V$ mit $f(v) = v$.

Die Grundidee des Beweises ist, daß man einen beliebigen Punkt x mit f abbildet und den Bildpunkt wieder mit f abbildet und so weiter. Die Folge der Bildpunkte ist dann eine Cauchyfolge und hat einen Grenzwert. Dieser Grenzwert ist Fixpunkt von f, und zwar der einzige.

Beweis: Sei $x \in V$ beliebig gewählt.

(1) $(f^n(x))$ ist eine Cauchyfolge und hat einen Grenzwert v. Seien dazu $m, n \in \mathbb{N}$ und oBdA $k \in \mathbb{N}$ mit $k = m - n > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|f^n(x) - f^m(y)\| &= \|f^n(x) - f^{n+k}(x)\| = \|f^n(x) - f^n(f^k(x))\| \\
&\leq \lambda^n \|x - f^k(x)\| \qquad \text{(Aufgabe 19 (a))} \\
&\leq \lambda^n \sum_{i=0}^{k-1} \|f^i(x) - f^{i+1}(x)\| \qquad \text{(Aufgabe 19 (b))} \\
&= \lambda^n \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i \|x - f(x)\| \qquad \text{(Aufgabe 19 (a))} \\
&= \lambda^n \|x - f(x)\| \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i = \frac{\lambda^n (1 - \lambda^k)}{1 - \lambda} \|x - f(x)\| \qquad \text{(Aufgabe 20)} \\
&\leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \|x - f(x)\|.
\end{aligned}$$

Dies aber konvergiert wegen $\lambda < 1$ gegen 0 für $n \to \infty$, woraus die Behauptung folgt.

(2) Es ist $f(v) = v$. Dies folgt sofort aus der Stetigkeit von f wegen

$$f(v) = f(\lim f^n(x)) = \lim f^{n+1}(x) = v.$$

(3) v ist der einzige Fixpunkt von f. Zum Beweis nehme man an, daß w ein weiterer Fixpunkt von f sei. Dann ist aber $\|v - w\| = \|f(v) - f(w)\| \leq \lambda \|v - w\| < \|v - w\|$ und deshalb $v = w$. ■

2 Der Satz von Picard-Lindelöf

In diesem zweiten Teil der Vorlesung wollen wir eine Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes vorstellen. Wir suchen Lösungen von Gleichungen, die eine Funktion mit ihrer Ableitung in Beziehung setzen, sogenannter Differentialgleichungen. Diese Gleichungen tauchen bespielsweise auf, wenn wir biologische und physikalische Vorgänge mathematisch fassen und beschreiben wollen. Sie haben meist keine explizite Lösung. Die Aussage des Satzes von Picard-Lindelöf, dessen Beweis auf einer Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes beruht, ist, daß (unter gewissen Bedingungen) Lösungen existieren und eindeutig sind. Beides sind wichtige Kriterien für die Güte und Gültigkeit eines mathematischen Modells und ermöglichen erst Aussagen über das Verhalten der Lösungen, ohne diese genau zu kennen.

2.1 Mathematische Modelle in der Biologie

Wenn wir die Entwicklung eines biologischen Systems im Lauf der Zeit beschreiben wollen, stehen wir häufig vor dem Problem, daß die Änderung des Systems von seinem jeweiligen Zustand abhängt, den wir aber (noch) nicht kennen. Ein Beispiel soll das erläutern.

In einem Zoo bekommen Luchse jeden Tag eine bestimmte Menge Futter pro Tier. Ihr Überleben hängt nicht vom Vorhandensein möglicher Beute oder ihrem Jagderfolg ab. In freier Wildbahn machen die Tiere anfangs viel Beute, dezimieren so die Zahl der möglichen Beutetiere, und es ist kein Wärter da, der neues Futter bringt. Im ersten Fall kann man annehmen, daß sich die Tiere (innerhalb gewisser Grenzen) unabhängig von ihrer Anzahl vermehren, im zweite Fall muß man diese Anzahl miteinbeziehen.

Exponentielles Wachstum
Vermehrung von Bakterien oder Zerfall radioaktiver Substanzen sind einfache Beispiele, in denen die momentane Änderung der Anzahl von der vorhandenen Anzahl abhängt. Wir bezeichnen mit $P(t)$ die Anzahl zum Zeitpunkt t. Die Änderung dieser Anzahl ist proportional zum Bestand. (Sind doppelt so viele Bakterien vorhanden, so werden doppelt so viele hinzukommen, ist doppelt so viel radioaktive Substanz vorhanden, so zerfällt doppelt so viel.) Die Änderung von P wird durch die Ableitung $\dot{P}$ beschrieben und wir haben unser erstes Modell

$$\dot{P}(t) = aP(t). \tag{1}$$

Dabei entscheidet das Vorzeichen von a, ob die Anzahl zu- oder abnimmt. Gleichung (1) ist ein sehr einfaches Beispiel einer *Differentialgleichung.* Die Lösungen lassen sich explizit bestimmen.

Aufgabe 21 Zeige durch differenzieren, daß $P(t) = e^{at}$ Gleichung (1) löst. Zeige, daß die Vielfachen davon genau alle Lösungen sind. (Sei Q eine Lösung. Wie ist die Ableitung des Quotienten Q/P?) Welche Funktion hat der Faktor, um den sich zwei Lösungen unterscheiden? Diskutiere das Verhalten der Lösungen im Vergleich mit natürlichen Vorgängen.

Logistisches Wachstum
Es ist realistisch anzunehmen, daß in einem bestimmten Lebensraum nur eine bestimmte Anzahl von Individuen gleichzeitig leben kann (Kapazität). Ist die Population nahe dieser Grenze, so sinkt die Reproduktionsrate wegen knapper Lebensgrundlagen oder Verteilungskämpfen. In unserem Modell wollen wir also $\dot{P} \sim P$ für kleine P und $\dot{P} \sim (K - P)$ für P nahe der Kapazität K. Es bietet sich die Gleichung

$$\dot{P} = a\left(1 - \frac{P}{K}\right)P \tag{2}$$

an, wobei a die Vermehrungsrate bei kleiner Population ist. Die Gleichung wurde zuerst von P.-F. Verhulst (1804-1849) untersucht. Lösungen lassen sich explizit darstellen:

$$P(t) = \frac{K}{\left(\frac{K}{P_0} - 1\right) e^{-at} + 1}, \qquad P_0 > 0. \tag{3}$$

Aufgabe 22 Zeige, daß (3) tatsächlich Gleichung (2) löst und diskutiere den Verlauf von Lösungen im Unterschied zu Lösungen von (1) und im Vergleich mit natürlichen Vorgängen. Welche Bedeutung hat der Wert P_0?

2.2 Differentialgleichungen

Die Gleichungen (1) und (2) sind Beispiele sogenannter Differentialgleichungen (DGL). Bei dieser Art von Gleichung werden eine Funktion und ihre Ableitung miteinander in Beziehung gesetzt. Allgemeiner schreibt man sie in der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad \text{oder kurz} \qquad \dot{x} = f(x). \tag{4}$$

Je nach Wahl von f verhalten sich die Gleichungen sehr unterschiedlich.

1) $(\dot{x})^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung.

2) $(\dot{x})^2 + x^2 = 0$ hat genau eine Lösung. (Welche?)

3) $\dot{x} = ax$ hat unendlich viele Lösungen. (siehe Aufgabe 21)

4) $\dot{x} = x^2$ hat (außer $x = 0$) keine Lösungen, die für alle $t > 0$ existieren.

5) $\dot{x} = x^{2/3}$ zeigt, daß Lösungen nicht eindeutig sein müssen.

Die unendlich vielen Lösungen in 3) lassen sich unterscheiden, wenn man einen Wert vorgibt, bei dem die Lösungsfunktion starten soll, also $x(0) = x_0$, den sogenannten *Anfangswert*. Das gibt in 4) mit $x(0) = 1$ die Lösung $x(t) = 1/(1-t)$, die nur für $t < 1$ definiert ist. Doch selbst mit einem Anfangswert erreichen wir nicht notwendig Eindeutigkeit in 5). Mit $x(0) = 0$ bekommen wir Lösungen für alle $a > 0$

$$x_a(t) = \begin{cases} t^3/27 & \text{für } t \leq 0 \\ 0 & \text{für } 0 < t < a \\ (t-a)^3/27 & \text{für } t \geq a \end{cases}$$

Aufgabe 23 Zeige durch differenzieren die Richtigkeit der obigen Aussagen. Wie ändert sich die Lösung in 4) bei verändertem Anfangswert? Zeichne die Lösungen von 5).

Die Existenz mehrerer Lösungen zum selben Anfangswert hängt damit zusammen, daß die Funktion $f(x) = x^{2/3}$ nahe Null beliebig steil wird. Die folgende Definition schließt dieses Verhalten aus.

Definition 2.1 ((lokal) Lipschitz stetig) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *lokal Lipschitz stetig*, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ Zahlen $\delta_x, L_x > 0$ existieren, so daß folgende Ungleichung gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L_x |x - y| \quad \text{für} \quad |x - y| < \delta_x. \tag{5}$$

Kann man die Konstante L sogar unabhängig von x so wählen, daß die Ungleichung für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, dann sagt man, f sei (*global*) *Lipschitz stetig.*

Aufgabe 24 Jede Lipschitz stetige Funktion ist lokal Lipschitz stetig, jede lokal Lipschitz stetige Funktion ist stetig. Die Quadratfunktion ist nicht Lipschitz stetig aber lokal Lipschitz stetig, die Wurzelfunktion hingegen ist in Null nicht lokal Lipschitz stetig.

2.3 Der Satz von Picard-Lindelöf

Mit der letzten Definition werden wir die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen einer DGL für kurze Zeiten sicherstellen können. Ob Lösungen für alle Zeiten existieren, wie in den Beispielen (1) und (2), ist wesentlich schwieriger zu beantworten und hängt vom Einzelfall ab. Wir formulieren den Satz in seiner einfachsten Version, der Beweis enthält alle Ideen für allgemeinere Formulierungen.

Satz 2.2 (Satz von Picard-Lindelöf) Seien f eine Lipschitz stetige Funktion und (t_0, x_0) ein Anfangswert. Dann existiert für eine gewisse Zeit eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = f(x), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{6}$$

Präziser, es existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutig bestimmte Funktion

$$x(t)\colon I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}, \qquad x(t_0) = x_0,$$

die die Gleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$ erfüllt.

Beweis: Wir formulieren das Problem zunächst in ein Fixpunktproblem im Raum $\mathbf{C}(I)$ um und suchen dann nach einer geeigneten Teilmenge, auf der wir den Kontraktionssatz anwenden können. Für jede Funktion $y \in \mathbf{C}(I)$ definieren wir eine neue Funktion $A(y) \in \mathbf{C}(I)$ durch

$$A(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(y(s))ds.$$

1. Zwischenbehauptung: *Genau dann löst $y \in \mathbf{C}(I)$ das Anfangswertproblem (6) wenn y ein Fixpunkt von A ist.*
Gilt $y = Ay$, so auch $y' = (Ay)'$ und die Ableitung des Integrals ergibt $(Ay)'(t) = f(y(t))$. Erfüllt y das Anfangswertproblem so rechnen wir nach:

$$(Ay)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(y(s))ds = x_0 + \int_{t_0}^{t} y'(s)ds = x_0 + y(t) - y(t_0) = y(t).$$

Nun wenden wir den Fixpunktsatz an. Der Operator A ist nicht notwendig auf dem ganzen Raum $\mathbf{C}(I)$ eine Kontraktion. Daher wählen wir eine geeignete Teilmenge. Wir setzen

$$K := [x_0 - r, x_0 + r], \quad M := \max\{|f(x)| : x \in K\}$$

für ein $r > 0$. Ist L die Lipschitzkonstante von f, dann wählen wir ε so klein, daß gilt

$$\varepsilon < \frac{1}{2L}, \quad \varepsilon < \frac{r}{M}$$

und betrachten die Teilmenge

$$\mathcal{B} \colon = \{y \in \mathbf{C}(I) : y(I) \subset K\}.$$

2. Zwischenbehauptung: *Der Operator A läßt die Menge $\mathcal{B}$ invariant und ist auf dieser Menge eine Kontraktion.*
Sei $y \in \mathcal{B}$. Dann gilt

$$(Ay)(t) \leq x_0 + |t - t_0| \cdot M \leq x_0 + r$$

und $(Ay)(t) \geq x_0 - r$ entsprechend, wobei wir das Integral als Intervallänge mal Maximum des Integranden abgeschätzt haben. Nun müssen wir noch die Kontraktionskonstante finden. Seien dazu $y, z \in \mathcal{B}$ zwei Funktionen.

$$\begin{aligned}
\|Ay - Az\|_\infty &= \max_t |Ay(t) - Az(t)| = \max_t \left| x_0 + \int_{t_0}^t f(y(s))ds - x_0 - \int_{t_0}^t f(z(s))ds \right| \\
&= \max_t \left| \int_{t_0}^t f(y(s)) - f(z(s))ds \right| \leq \max_t \int_{t_0}^t L|y(s) - z(s)|ds \\
&\leq \max_t |t - t_0| L \|y - z\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|y - z\|_\infty
\end{aligned}$$

Die Menge $\mathcal{B}$ ist vollständig (Aufgabe 25) und also hat A nach Satz 1.20 genau einen Fixpunkt in $\mathcal{B}$. Dieser ist die gesuchte eindeutige Lösung des Anfangswertproblems. ■

Aufgabe 25 Zeige, daß die Menge $\mathcal{B}$ vollständig ist, d.h. ist (y_n) eine Cauchyfolge in $\mathcal{B}$, so gibt es ein $y \in \mathcal{B}$ mit $y_n \to y$. Wir wissen bereits, daß $y_n \to y$ in $\mathbf{C}(I)$. Es bleibt also zu zeigen, daß in der Tat $y \in \mathcal{B}$.

Bemerkung 2.3

1. Existiert der Grenzwert $\lim_{t \to \varepsilon} x(t) = x_1$, so kann man diesen als neuen Anfangswert nehmen, und aufgrund der Eindeutigkeitsaussage die Lösungen dann zu einer Lösung auf einem größeren Zeitintervall zusammensetzen.
2. Für den Beweis genügt es, daß f lokal Lipschitz stetig ist. Ist f global Lipschitz stetig, so existieren Lösungen sogar für alle Zeiten. Ist f nur stetig, so bekommen wir zwar keine eindeutigen Lösungen, aber immerhin deren Existenz. Der Beweis verläuft fast wie der Beweis oben, nur kommt ein anderer Fixpunktsatz zur Anwendung.
3. Ist die Änderung von x nicht nur von x, sondern auch von t abhängig, so lautet die DGL $\dot{x} = f(t, x)$. Auch dann gilt der Satz, sofern f in t stetig und in x lokal Lipschitz stetig ist.
4. Der Beweis funktioniert nicht nur für eine einzelne DGL, sondern auch für Systeme, d.h. für mehrere untereinander anhängige DGLs gleichzeitig. Statt mit einzelnen Funktionen arbeitet man dann mit Vektoren, deren Einträge Funktionen sind.

2.4 Anwendung und Ausblick

Anhand des Beispiels am Anfang entwickeln wir ein Modell für zwei Populationen x und y, wobei die "Räuber" y die "Beute" x fressen. Gibt es keine Räuber, so vermehrt sich die Beute exponentiell, ist keine Beute vorhanden, so sterben die Räuber exponentiell. Sind beide Spezies vorhanden, so ist die Häufigkeit eines Treffens proportional zum Produkt der Anzahlen der beiden Spezies. Die Verminderung der Beute bzw. der Zuwachs der Räuber wird dann durch "Rate mal Häufigkeit des Treffens" gegeben. Das Modell lautet

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= ax - bxy, \\
\dot{y} &= -cy + dxy,
\end{aligned} \qquad a, b, c, d > 0 \tag{7}$$

und wurde zuerst von Volterra (1923) und Lottka (1932) untersucht. Als Lösungen suchen wir also ein Paar von Funktionen $(x(t), y(t))$. Es gibt keine explizite Darstellung der Lösung wie in (1) oder (2), aber der Satz von Picard-Lindelöf liefert die Existenz einer eindeutigen Lösung zu jedem Anfangsdatum (x_0, y_0). Doch nicht nur das, er sagt auch, daß Lösungen zu positiven Anfangswerten nie negativ werden. Das ist natürlich ein wichtiges Kriterium für die Güte des Modells. (Was soll eine negative Anzahl von Tieren bedeuten?) Man sagt dafür kurz

Lemma 2.4 Das Modell (7) erhält Positivität.

Beweis: Sei $x(t_0) = 0$, dann ist $x(t) \equiv 0, y(t) = y_0 e^{-ct}$ eine Lösung von (7), und daher nach Satz 2.2 die einzige Lösung, und zwar für alle $t \in \mathbb{R}$. Angenommen es gäbe eine Lösung $(x(t), y(t))$ zu positiven Anfangswerten (x_0, y_0), die irgendwann in x negativ wird. Dann muß es aufgrund der Stetigkeit von x eine Stelle geben mit $x(t_0) = 0$. Wir haben jedoch eben gesehen, daß $x(t_0) = 0$ impliziert, daß x konstant gleich Null ist. Das ist ein Widerspruch. Der Fall für y ist analog. ∎

Die konstanten Funktionen $x(t) \equiv c/d, y(t) \equiv a/b$ sind eine Lösung von (7), bei der beide Populationen vorhanden sind. Es wird nur so viel Beute gefressen, wie neu geboren wird, aber gerade genug, um dem Sterben der Räuber entgegenzuwirken. Interessant ist nun zu untersuchen, was passiert, wenn dieses Gleichgewicht leicht gestört wird, z.B. wenn ein paar Räuber hinzukommen.

Lemma 2.5 Lösungen von (7) zu positiven Anfangsdaten $x_0, y_0 > 0$ sind periodisch, d.h. es gibt eine Zeit $T > 0$, für die $x(0) = x(T), y(0) = y(T)$ gilt. Insbesondere existieren die Lösungen für alle Zeiten.

Beweisskizze: Über der $x, y-$Ebene betrachten wir einen "Berg", wobei $H(x, y)$ die Höhe des Berges über dem Punkt (x, y) angibt. Der Berg hat seine Spitze über $x = c/d, y = a/b$ und nimmt von dort aus in jede Richtung monoton ab. Setzen wir nun die Lösung der Gleichungen in die Höhenfunktion ein, so erhalten wir einen Weg auf dem Berg. Wir zeigen, daß der Weg seine Höhe nicht ändert, wir also auf einer Höhenlinie entlanggehen, und irgendwann wieder am Ausgangspunkt ankommen müssen. Die Funktion H ist

$$H(x, y) = c \log(x) - dx + b \log(y) - ay.$$

Der Weg $t \mapsto H(x(t), y(t))$ ändert seine Höhe nicht, da

$$\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = c\frac{\dot{x}}{x} - d + b\frac{\dot{y}}{y} - a = 0,$$

wenn wir die Gleichungen (7) einsetzen. ∎

Gibt es also viele Beutetiere, so wächst die Anzahl der Räuber, weil sie viel Nahrung finden. Dadurch geht die Anzahl der Beutetiere zurück. Nun finden die Räuber zu wenig Nahrung und sterben. Das ermöglicht der Beute, sich zu erholen, und alles beginnt von vorn.

Literatur

[Bro92] Th. Bröcker, *Analysis II.* BI, Mannheim, 1992.

[BS81] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik, Ergänzende Kapitel.* Teubner, Leipzig, 1981.

[EK88] L. Edelstein-Keshet, *Mathematical Models in Biology.* Birkhäuser Mathematics Series, 1988.

[Heu89] H. Heuser, *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Verlag B.G. Teubner, Stuttgart, 1989.

[Heu92] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis Teil 1 und 2.* Teubner, Stuttgart, 7. Auflage, 1992.

[HS84] J. Hofbauer, K. Sigmund, *Evolutionstheorie und dynamische Systeme.* Verlag Paul Parey, Berlin, 1984.

Wir bedanken uns bei allen, die zum Gelingen des Begabtenförderungs-Workshops beigetragen haben. Universität Tübingen: Dr. S. Stangler, Fakultät für Mathematik, Zentrum für Datenverarbeitung, Mensa; Vortragende: Dr. G. Betsch, PD Dr. R. Bödi, A. Klotz, R. Rigger; Unterkunft: A. Eberhardt, D. Nölke, B.M. Siemers, J. Weber