Fixpunktsemantik

Pascal Hitzler

Die Frage danach, was ein Computerprogramm berechnet, führt natürlicherweise zur Suche nach Fixpunkten bestimmter Funktionen. Im vorliegenden Vortrag soll dieser Zusammenhang erläutert werden. Die Darstellung folgt [1], Chapter 1.

1 Ein Beispiel

Beispiel 1.1 Betrachte das folgende Programm:

```
PROGRAM factorial(input,output);

CONST m=maxint;
TYPE  natural = 0..m;
VAR k: natural

FUNCTION f(n:natural):natural;
    BEGIN
    IF n=0 THEN f:=1
           ELSE f:=n*f(n-1);
    END;

BEGIN
read(k);
write(k,' Fakultaet ist ',f(k));
END.
```

`factorial` berechnet rekursiv die Fakultät einer gegebenen Zahl n. Mathematisch formuliert ist das Programm eine rekursiv definierte Funktion

$$fac : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : fac(n) := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ n \cdot fac(n-1) & \text{für } n \geq 1. \end{cases} \tag{1}$$

Um diese Funktion als einen *Fixpunkt* verstehen zu können, betrachten wir folgendes Funktional. A sei dabei und im folgenden die Menge aller partiellen Funktionen auf $\mathbb{N}$ (dh. die Urbildbereiche müssen nicht notwendigerweise ganz $\mathbb{N}$ sein).

$$Fac : A \longrightarrow A : Fac(h) := \left(n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ n \cdot h(n-1) & \text{für } n \geq 1 \end{cases} \right). \tag{2}$$

Man sieht sofort, daß fac aus Gleichung (1) ein Fixpunkt des Funktionals Fac ist, das heißt es ist $Fac(fac) = fac$.

Um diesen Fixpunkt näher untersuchen zu können, benötigen wir eine Ordnungsstruktur auf der Menge aller partiellen Funktionen auf $\mathbb{N}$.

Definition 1.2 Eine Menge M heißt *partiell geordnet durch „$\leq$"*, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt:

1. $x \leq x$
2. $(x \leq y \text{ und } y \leq z) \Longrightarrow x \leq z$
3. $(x \leq y \text{ und } y \leq x) \Longrightarrow x = x$

Definition 1.3 Sei A die Menge aller partiellen Funktionen auf $\mathbb{N}$. Für $f \in A$ bezeichne $\text{dom}f$ den Urbildbereich von f. Definiere den *Graphen* von f als $\text{graph}f := \{(n, f(n)) \mid n \in \text{dom}f\}$. Definiere die partielle Ordnung „$\leq$" auf A durch

$$f \leq g \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \text{graph}f \subseteq \text{graph}g.$$

Wir werden sehen, dass der oben gefundene Fixpunkt fac von Fac der bezüglich der in Definition 1.3 gegebenen Ordnung kleinste Fixpunkt von Fac und damit eindeutig bestimmt ist.

2 Der Satz von Knaster-Tarski

Wir verallgemeinern die in Abschnitt 1 angestellten Überlegungen und werden mit Satz 2.5 ein Resultat erhalten, das die Existenz von kleinsten Fixpunkten unter gewissen Bedingungen garantiert.

Definition 2.1 Eine partiell geordnete Menge $(D, \leq)$ heißt eine ω-*cpo* (ω-*complete partial order*), wenn gilt:

(i) $\exists \perp \in D\ \forall\, x \in D : \perp \leq x$ („$\perp$" heißt *Bottom-Element*) und

(ii) Jede ω-Kette $x_0 \leq x_1 \leq \ldots$ in D hat ein Supremum $\sup\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ in D.

Beispiel 2.2 Die in Abschnitt 1 definierte Menge A aller partiellen Funktionen auf $\mathbb{N}$ ist mit der in Definition 1.3 definierten Ordnung eine ω-cpo. Dabei ist $\perp = \emptyset$.

Man kann sich $x \leq y$ auf einer ω-cpo D so vorstellen, daß y mindestens soviel Information wie x enthält, oder besser, daß y von x approximiert wird. $\perp$ enthält also gar keine Information, da es alle anderen Elemente in D approximiert.

Definition 2.3 Seien C, D ω-cpos und $f : C \longrightarrow D$.

(i) f heißt *monoton*, wenn $(x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y))$.

(ii) f heißt ω-*stetig*, wenn f monoton ist und für jede ω-Kette $x_0 \leq x_1 \leq \ldots$ in C gilt: $f(\sup\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \sup\{f(x_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$

Beispiel 2.4 In der Situation von Beispiel 2.2 ist das in Gleichung (2) definierte Funktional Fac monoton und stetig.

Nun sind wir in der Lage, das Hauptergebnis zu formulieren.

Satz 2.5 (Fixpunktsatz von Knaster-Tarski) Sei D eine ω-cpo und $f : D \longrightarrow D$ ω-stetig. Dann hat f einen kleinsten Fixpunkt in D.

Beweis: Definiere rekursiv

$$\begin{aligned} f^0(\perp) &:= \perp \text{ und} \\ f^{n+1}(\perp) &:= f(f^n(\perp))\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Da f monoton und $\perp$ das kleinste Element in D ist, erhält man eine ω-Kette

$$\perp = f^0(\perp) \leq f^1(\perp) \leq f^2(\perp) \leq \ldots.$$

Sei $x = \sup\{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann folgt aufgrund der Stetigkeit von f

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\sup\{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\}) \\ &= \sup\{f(f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N})\} \\ &= \sup\{f^{n+1}(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= x. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Existenz eines Fixpunktes von f.

Um zu zeigen, daß x der kleinste Fixpunkt von f ist, sei $y \in D$ ein weiterer Fixpunkt von f. Dann ist $\perp \leq y$ und aufgrund der Monotonie von f ist $f(\perp) \leq f(y) = y$. Induktiv folgt $f^n(\perp) \leq y$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $x = \sup\{f^n(\perp) \mid n \in \mathbb{N}\} \leq y$. $\square$

Satz 2.5 garantiert die Existenz eines kleinsten Fixpunktes des Funktionals Fac. Darüber hinaus liefert der Beweis des Satzes eine Vorschrift, wie dieser Fixpunkt berechnet werden kann, nämlich als Supremum der Menge $\{Fac^n(\emptyset) \mid n \in \mathbb{N}\}$, dh., nach Identifikation von Funktionen mit ihren Graphen, als Vereinigung $F = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$ der Mengen

$$
\begin{aligned}
F_0 &:= \emptyset \\
F_1 &:= Fac(F_0) = \{(0,1)\} \\
F_2 &:= Fac(F_1) = \{(0,1),(1,1)\} \\
F_3 &:= Fac(F_2) = \{(0,1),(1,1),(2,2)\} \\
F_4 &:= Fac(F_3) = \{(0,1),(1,1),(2,2),(3,6)\} \\
\dots&.
\end{aligned}
$$

Literatur

[1] V. Stoltenberg-Hansen, I. Lindström, R. Griffor: *Mathematical Theory of Domains*, Cambridge Univ. Press, 1994