Der Kontraktionssatz auf metrischen Räumen und Verallgemeinerungen

Pascal Hitzler

Vorlesung auf dem Intensivkurs Mathematik Donaueschingen 2000

Department of Mathematics, University College Cork, Irland
http://maths.ucc.ie/~pascal/
phitzler@ucc.ie

Auf dem Intensivkurs Mathematik 1996 in Donaueschingen wurde von mir ein Kurs mit dem Titel „Der Kontraktionssatz auf metrischen Räumen“ gehalten; eine Ausarbeitung der Vorlesung ist in [Hit97b] erschienen. Für den Intensivkurs 1999 wurde die Vorlesung durch Verallgemeinerungen des Kontraktionssatzes erweitert. Das vorliegende Skript ist eine überarbeitete Version für den Intensivkurs 2000 in Ulm.

Der Schwerpunkt der Vorlesung liegt auf metrischen Räumen und dem Beweis des Kontraktionssatzes. Parallel dazu und im Anschluß daran werden Verallgemeinerungen besprochen, die durch Abschwächungen der eine Metrik definierenden Axiome erhalten werden können. Insbesondere werden Pseudometriken, Quasimetriken und verschobene Metriken[1] behandelt, der Fixpunktsatz von Matthews [Mat86], sowie ein Teil des Satzes von Rutten-Smyth [Rut95].

Das Thema wurde von mir ausgewählt, da die Inhalte als Verallgemeinerungen der aus der Schule bekannten Begriffe und Sachverhalte im Raum der reellen Zahlen leicht zu motivieren sind und in kurzer Zeit die Voraussetzungen zum Beweis eines in vielen Bereichen der Mathematik wichtigen Satzes, des Kontraktionssatzes, bzw. des Banachschen Fixpunktsatzes im Spezialfall metrischer Räume, bereitgestellt werden können. Durch die Diskussion des Satzes von Rutten-Smyth [Rut95] und des Fixpunktsatzes von Matthews [Mat86] stellt die Vorlesung ausserdem neue Resultate in elementarer Form dar.

Die Diskussion verallgemeinerter Metriken ist von aktueller Bedeutung in der theoretischen Informatik, insbesondere im Bereich Semantik von Programmiersprachen. Durch die Einführung verschiedener verwandter Strukturen soll das Prinzip der Verallgemeinerung in der Mathematik verstanden werden.

[1] *Dislocated metrics* in [HS00a], eingeführt unter dem Begriff *metric domains* in [Mat86].

Voraussetzungen für das Verständnis der Vorlesung sind Vertrautheit mit den grundlegenden Eigenschaften der reellen Zahlen sowie mit den Begriffen der Funktion und der vollständigen Induktion. Außerdem gehe ich davon aus, daß die Begriffe der Konvergenz von Folgen sowie der Stetigkeit von Funktionen in $\mathbb{R}$ bekannt sind und somit zur Motivation herangezogen werden können. Unbekannte Bezeichnungen, zB. die Menge X^n aller n-Tupel über einer Menge X, können *ad hoc* eingeführt werden.

Auf Anwendungsbeispiele wurde bei der Darstellung bewusst verzichtet. Intuitive Einsicht in das Material soll durch abstrakte Behandlung vieler verwandter Strukturen erreicht werden. Die Übungsaufgaben beinhalten jedoch einige wenige Beispiele metrischer Räume, leichte Rechenaufgaben zum Einüben der gelernten Begriffe, sowie weiterführende Fragestellungen, die zum Teil auf nachfolgende Themen vorbereiten oder diese sogar vorwegnehmen. Die Schüler werden dadurch mit denselben oder ähnlichen Denkweisen aus verschiedenen Blickwinkeln konfrontiert, und viele der Aufgaben sind eher als Diskussionsgrundlagen zu verstehen. Den Aufgabenteilen folgt jeweils ein Abschnitt mit Hinweisen, Lösungsansätzen und Erläuterungen zu den Aufgaben.

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

In diesem Kurs werden wir metrische Räume betrachten; das sind Mengen, bei denen zu je zwei Elementen (*Punkten*) ein *Abstand* (eine *Metrik*) zugeordnet werden kann. Ein einfaches Beispiel sind die reellen Zahlen, wobei der Abstand zweier Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gleich $|x - y|$ ist. Wir werden sehen, daß viele von den reellen Zahlen bekannte Begriffe, wie Konvergenz von Folgen oder Stetigkeit von Funktionen, fast wortwörtlich auf metrische Räume übertragen und dadurch verallgemeinert werden können.

Parallel dazu in den Übungsaufgaben und im Anschluß an die Behandlung metrischer Räume werden wir über Abstandsfunktionen reden, die allgemeiner sind als Metriken. Diese verallgemeinerten Metriken sind in der Mathematik nicht so gebräuchlich wie gewöhnliche Metriken und vielleicht auch weniger intuitiv. Gerade in den letzten Jahren wurden diese verallgemeinerten Metriken aber verstärkt erforscht, da in der theoretischen Informatik Anwendungen gefunden wurden.

Wir werden im Laufe dieser Vorlesung eine Gruppe von Fixpunktsätzen kennenlernen, von denen jeder mit dem Banachschen Kontraktionssatz, den wir behandeln werden, verwandt ist. Fixpunkte sind Punkte, die unter einer gegebenen Abbildung auf sich selbst abgebildet werden. Fixpunktsätze sind mathematische Resultate, die Bedingungen angeben, unter denen eine Funktion einen Fixpunkt hat.

Fixpunktsätze sind von Bedeutung in der Mathematik, da viele Probleme auf das Finden von Fixpunkten geeigneter Funktionen zurückgeführt werden können. Ich möchte hier nur ein einfaches Beispiel geben.

Gesucht sind Nullstellen eines gegebenen Polynoms $p(x)$. Wir führen dieses Problem auf ein Fixpunktproblem zurück, indem wir ein neues Polynom $q(x) = p(x) + x$ bilden. Ist nun x_0 ein Fixpunkt von $q(x)$, d.h. $q(x_0) = x_0$, dann gilt $p(x_0) + x_0 = x_0$, d.h. $p(x_0) = 0$ und wir haben eine Nullstelle von $p(x)$ gefunden. Umgekehrt ist jede Nullstelle von $p(x)$ ein Fixpunkt von $q(x)$. Das Auffinden von Nullstellen von $p(x)$ kann also duch Auffinden der Fixpunkte von $q(x)$ vollständig gelöst werden.

2 Metrische Räume

Wir wollen einen sinnvollen Begriff von dem, was ein Abstand zwischen zwei Punkten sein soll, mathematisch präzise formulieren. Aus einem geometrischen Blickwinkel ist es einleuchtend, daß ein Punkt zu sich selbst und nur zu sich selbst den Abstand 0 haben soll. Außerdem soll der Abstand zweier Punkte unabhängig davon sein, von welchem der Punkte aus man ihn mißt. Als drittes wollen wir noch verlangen, daß, faßt man drei gegebene Punkte als Ecken eines Dreiecks auf, je zwei Seiten dieses Dreiecks zusammen länger sein sollen als die jeweils dritte. Wir definieren also den Begriff der *Metrik*:

Definition 2.1 (Metrik) Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt eine *Metrik* auf X, wenn sie für alle $x, y, z \in X$ die folgenden Axiome erfüllt:

(M1) $d(x,x) = 0$

(M2) Aus $d(x,y) = 0$ und $d(y,x) = 0$ folgt $x = y$.

(M3) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)

(M4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecksungleichung)

Das Paar (X,d) heißt dann ein *metrischer Raum*.

Wir geben einige Beispiele für metrische Räume. Der Nachweis, daß es sich wirklich um solche handelt, ist einfach und Inhalt der Übungsaufgabe 1.

Beispiel 2.2 (a) Sei $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : d(x,y) := |x-y|$. Dann ist $(\mathbb{R}, d)$ ein metrischer Raum. d heißt die *natürliche Metrik* auf $\mathbb{R}$.
(b) $\mathbb{Q}$, versehen mit derselben Metrik wie in (a), ist ein metrischer Raum.
(c) Sei X eine Menge und $d(x,y) = 1$ für $x \neq y$ und $d(x,x) = 0$ für alle $x, y \in X$. Dann ist (X,d) ein metrischer Raum. d heißt die *diskrete Metrik* auf X.

Die Metrik in Beispiel (c) drückt aus, ob zwei Punkte $x, y \in X$ in Wirklichkeit derselbe Punkt sind oder nicht.

Der Abstand zweier Punkte soll natürlich nie negativ werden. Daß dies gewährleistet ist, zeigt

Proposition 2.3 Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann ist $d(x,y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$.

Beweis: Seien $x, y \in X$. Dann ist $0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2 \cdot d(x,y)$, also $0 \leq d(x,y)$. ■

Aufgaben

Aufgabe 1 Zeige, daß die Räume in Beispiel 2.2 tatsächlich metrisch sind.

Aufgabe 2 Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeige: $|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$.

Aufgabe 3 Sei $X := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} : d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Zeige: (X,d) ist ein metrischer Raum.
Warum nennt man d die *New-York-Metrik*?

Aufgabe 4 Sei (X,d) ein metrischer Raum. Sei $d_1(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ für $x, y \in X$. Zeige: (X, d_1) ist ein metrischer Raum.

Aufgabe 5 Sei X eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die folgende Axiome für alle $x, y, z \in X$ erfüllt: (1) $d(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$. (2) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$. Zeige, daß (X,d) ein metrischer Raum ist und daß jede Metrik (1) und (2) erfüllt.

Aufgabe 6 Seien $n \in \mathbb{N}$ und $X = \{0, 1\}$. Für $a = (a_1, \ldots, a_n) \in X^n$ und $b = (b_1, \ldots, b_n) \in X^n$ sei $d_n(a, b) := |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n|$. Zeige: (X^n, d_n) ist ein metrischer Raum für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 7 Seien $X = \{0, 1\}$ und Y die Menge aller Folgen in X, die mit 0 beginnen, das heißt für ein $y \in Y$ ist $y = (y_0, y_1, y_2, \ldots)$ mit $y_n \in X$ für $n \in \mathbb{N}$ und $y_0 = 0$. Für $x = (x_0, x_1, \ldots), y = (y_0, y_1, \ldots) \in Y$ setze

$$d(x, y) := \inf\{2^{-n} \mid x_m = y_m \text{ für alle } m \leq n\}.$$

Zeige, daß (Y, d) ein metrischer Raum ist.

Aufgabe 8 Eine Menge X zusammen mit einer Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ heißt ein *quasi-metrischer Raum* wenn d die Bedingungen (M1), (M2) und (M4) erfüllt.

(a) Kann man d vernünftigerweise als „Abstandsfunktion“ auffassen?

(b) Zeige, daß jeder metrische Raum auch quasimetrisch ist. Zeige, daß $(\mathbb{N}, d_{\geq})$ mit $d_{\geq}(m, n) = 0$ für $m \geq n$ und $d_{\geq}(m, n) = 1$ für $m < n$ ein quasi-metrischer Raum ist.

(c) Sei (X, d) ein quasi-metrischer Raum. Für alle $x, y \in X$ setze $d^*(x, y) = \max\{d(x, y), d(y, x)\}$. Zeige, daß (X, d^*) ein metrischer Raum ist.

Hinweise zu den Aufgaben

Zu Aufgabe 1
(a),(b): Dreiecksungleichung: Zunächst wird durch Fallunterscheidung gezeigt, daß $|x + y| \leq |x| + |y|$ ist. Dann folgt $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |y - z|$.

Zu Aufgabe 2
$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$, also $d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z)$. Ebenso $d(y, z) - d(x, y) \leq d(x, z)$.

Zu Aufgabe 3
Dreiecksungleichung: Mit Aufgabe 1 (a) folgt

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|.$$

Stellt man sich zwei Punkte $x, y \in X$ in einem Koordinatensystem dargestellt vor, so ist $d(x, y)$ gleich der Abszissendifferenz plus der Ordinatendifferenz. In einer Stadt mit geraden, rechtwinklig zueinander verlaufenden Straßen („New York“) entspricht dies genau der Strecke, die man zurücklegen muss, um von dem einen Punkt zum anderen zu gelangen.

Zu Aufgabe 4
Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} &= \left(\frac{1+d(x,y)}{d(x,y)}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{d(x,y)}+1\right)^{-1} \le \left(\frac{1}{d(x,z)+d(z,y)}+1\right)^{-1} \\ &= \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\ &\le \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}\end{aligned}$$

Zu Aufgabe 5
Jede Metrik erfüllt offensichtlich (1) und (2). Aus (1) folgen sofort (M1) und (M2). Es genügt nun zu zeigen, daß aus (1) und (2) auch Symmetrie (M3) folgt. Seien dazu $x, y \in X$. Setzen wir $x = z$ in (2) so folgt $d(x,y) \le d(x,x) + d(y,x) = d(y,x)$ und mit $y = z$ ebenso $d(y,x) \le d(y,y) + d(x,y) = d(x,y)$. Also ist $d(x,y) = d(y,x)$.

Zu Aufgabe 6
Die Dreiecksungleichung zeigt man im wesentlichen wie in Aufgabe 3. $d_n(a,b)$ ist die Anzahl der *verschiedenen* Komponenten der beiden Vektoren a und b.

Zu Aufgabe 7
Diese Aufgabe ist vorbereitend für die Aufgaben 20 und 21. $x = (0, x_1, x_2, \dots) \in X$ kann verstanden werden als ein Ast in einem (unendlichen und echten) Binärbaum. [2] Dabei interpretiert man $x_i = 0$ als linken, $x_i = 1$ als rechten Nachfolger von x_{i-1} und $x_0 = 0$ als Wurzel. Für zwei Äste $x, y \in X$ beschreibt $d(x,y)$, in wie vielen aufeinanderfolgenden Knoten, von der Wurzel an gerechnet, x und y übereinstimmen. (X,d) ist Beispiel für einen *ultrametrischen Raum*, in dem sogar die *starke Dreiecksungleichung* $d(x,y) \le \max\{d(x,z), d(z,y)\}$ gilt. Diese sieht man sofort durch Betrachtung eines Binärbaumes ein. Formal zeigt man die starke Dreiecksungleichung so: Ist $d(x,y) = 0$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $d(x,y) = 2^{-n}$, das heißt $x_m = y_m$ für alle $m \le n$ und $x_{n+1} \ne y_{n+1}$ Sei nun $z = (z_0, z_1, \dots) \in Y$ beliebig. Dann ist $z_{n+1} \ne x_{n+1}$ oder $z_{n+1} \ne y_{n+1}$, dh. es ist $d(x,z) \ge 2^{-n}$ oder $d(y,z) \ge 2^{-n}$ und es folgt die Behauptung.

Zu Aufgabe 8
(a) Die Abstandsfunktion d einer Quasimetrik ist nicht symmetrisch. Im wirklichen Leben treten solche „Abstände“ auf, wenn man nicht in Metern misst, sondern z.B. in Aufwand oder Benzinverbrauch etc. So kann man zum Beispiel den „Abstand“ einer Stadt im Tal und einer Bergspitze durch den Zeitaufwand eines Fahradfahrers messen. Ausserdem gibt es einen engen Zusammenhang zwischen Quasimetriken und Ordnungsstrukturen ([Rut95]) — siehe dazu auch Aufgabenteil (b).
(b),(c) Einfach.

[2] Der Begriff des Binärbaums wird zur Erläuterung und zum besseren Verständnis der Aufgaben 7 und 20 herangezogen. Er wird in diesem Zusammenhang nicht erklärt.

3 Stetigkeit und Konvergenz

Eine Metrik gibt uns ein quantitatives Maß für die Nähe zweier Punkte. Uns interessieren nun Funktionen mit metrischen Räumen als Definitions- und Wertebereich, die die Eigenschaft haben, daß für zwei Punkte, die nahe beieinander liegen, auch die Bilder dieser beiden Punkte nahe beieinander liegen. Solche Funktionen nennt man *stetige* Funktionen:

Definition 3.1 Seien (X, d), (Y, d') metrische Räume. Eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ heißt *stetig in* a $(\in X)$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $x \in X$ mit $d(x, a) < \delta$ gilt: $d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$.
f heißt *stetig*, wenn f stetig in a für alle $a \in X$ ist.

Man mache sich klar, daß für $X = Y = \mathbb{R}$ die stetigen Funktionen genau die sind, deren Graph zusammenhängend ist.

Mit Hilfe einer Metrik können wir auch sagen, was es heißt, daß eine Folge von Punkten sich einem Punkt annähert, dh. gegen diesen *konvergiert*. Dies soll dann der Fall sein, wenn die Folge dem Punkt beliebig nahe kommt:

Definition 3.2 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in X$ für alle n, heißt *konvergent* gegen den *Grenzwert* $x \in X$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $d(x_n, x) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ ist. Man schreibt dann auch $x_n \longrightarrow x$.

Beispiele findet man in Übungsaufgabe 10.

Der folgende Satz zeigt, wie man Stetigkeit von Funktionen mit Hilfe von Folgenkonvergenz charakterisieren kann:

Satz 3.3 Seien (X, d), (Y, d') metrische Räume. $f : X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit Grenzwert x auch $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in Y mit Grenzwert $f(x)$ ist.

Beweis: „$\Longrightarrow$“ Sei $x_n \longrightarrow x$ in X und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, sodaß $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für alle $y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$ ist. Da (x_n) gegen x konvergiert, existiert außerdem ein n_0, so daß $d(x, x_n) < \delta$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Es folgt also $d(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, konvergiert $(f(x_n))$ gegen $f(x)$.
„$\Longleftarrow$“ Sei f *nicht* stetig, z.B. in $x \in X$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodaß für alle $\delta > 0$ ein x_δ existiert mit $d(x_\delta, x) < \delta$ und $d(f(x_\delta), f(x)) \geq \varepsilon$. Betrachte die Folge $(x_{\delta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\delta_n = \frac{1}{n}$. Offensichtlich konvergiert (x_{δ_n}) gegen x, aber $(f(x_{\delta_n}))$ nicht gegen $f(x)$. Dies zeigt die Behauptung. ■

Der zweite Teil des obigen Beweises ist ein Beispiel für einen *indirekten Beweis* (*Beweis durch Kontraposition*): Wenn man zeigen will, daß aus einer Aussage A eine Aussage B

folgt, kann man statt dessen auch zeigen, daß, falls B *nicht* gilt, auch A nicht gelten kann.

Wir haben in Definition 3.2 definiert, wann ein Punkt Grenzwert einer Folge ist. Nun wäre es ja denkbar, daß eine Folge mehrere Grenzwerte hat (siehe dazu Aufgabe 12). Wir können aber beweisen, daß Grenzwerte von Folgen immer eindeutig sind:

Proposition 3.4 Der in Definition 3.2 definierte Grenzwert ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $x_n \longrightarrow x$ und $x_n \longrightarrow y$. *Annahme:* $x \neq y$. Dann ist $d(x,y) =: \varepsilon > 0$ nach Proposition 2.3 und (M1). Außerdem existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Sei $m \geq n_0$. Dann ist $\varepsilon = d(x,y) \leq d(x, x_m) + d(x_m, y) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, also $\varepsilon < \varepsilon$, was unmöglich ist. Also ist $x = y$. ■

Dieser Beweis ist Beispiel für einen *Widerspruchsbeweis*: Um zu zeigen, daß eine Aussage B gilt, kann man auch annehmen, daß B nicht gilt und dies zum Widerspruch führen, das heißt, eine unmögliche Aussage daraus folgern.

Da wir jetzt wissen, daß Grenzwerte von Folgen eindeutig sind, können wir vereinbaren:

Notation 3.5 Konvergiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Punkt x, so schreibt man auch $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, abkürzend $\lim x_n = x$.

Aufgaben

Aufgabe 9 Gegeben sei $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Metrik. Zeige, daß die Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \longmapsto |x|$ stetig ist. Dabei sei $\mathbb{R}_+$ die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Aufgabe 10 Betrachte $\mathbb{R}$, versehen mit der natürlichen Metrik.

(a) Seien $x_n := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ gegen 0.

(b) Sei $0 \leq \lambda < 1$. Zeige: $\lim_{n\to\infty} \lambda^n = 0$.

Aufgabe 11 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ sei $\mathcal{B}_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ die *offene ε-Kugel um x*. Zeige die folgende *Hausdorff-Eigenschaft* des Raumes X: Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $\mathcal{B}_\varepsilon(x) \cap \mathcal{B}_\varepsilon(y) = \emptyset$ ist.

Aufgabe 12 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt eine *Pseudo-Metrik* auf X, wenn für alle $x, y \in X$ die Axiome (M2), (M3) und (M4) gelten.

(a) Was unterscheidet eine Pseudo-Metrik von einer Metrik?

(b) Definiere die offenen ε-Kugeln um $x \in X$ für $\varepsilon > 0$ wie in Aufgabe 11: $\mathcal{B}_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$.

Zeige, daß die Hausdorff-Eigenschaft in pseudo-metrischen Räumen im allgemeinen nicht gilt. Gib dazu ein Gegenbeispiel an.

(c) Definiere den Begriff der Konvergenz wie in Definition 2.2: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in X$ für alle n, heißt *konvergent* gegen den *Grenzwert* $x \in X$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $d(x_n, x) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ ist.
Zeige, daß in einem pseudo-metrischen Raum eine Folge gegen zwei verschiedene Punkte konvergieren kann.

(d) Definiere $X_p := \{q \in X \mid d(q,p) = 0\}$ und die Menge $Y := \{X_p \mid p \in X\}$. Zeige: Die Abbildung $d_2 : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R} : d_2(X_p, X_r) := d(p,r)$ ist eine *wohldefinierte* Metrik auf Y, dh. $d_2(X_p, X_r)$ ist durch obige Definition eindeutig bestimmt, dh. wenn $X_p = X_q$ und $X_r = X_s$ ist, dann ist auch $d(p,r) = d(q,s)$.

Hinweise zu den Aufgaben

Zu Aufgabe 9
Benutze Definition 3.1 und wähle $\delta := \varepsilon$.

Zu Aufgabe 10
(a) Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dies ist möglich, da $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet ist.
(b) Wähle $n_0 > \frac{\log \varepsilon}{\log \lambda}$, dann ist $\lambda^n < \varepsilon$.

Zu Aufgabe 11
Seien $x, y \in X$. Wähle $\varepsilon := \frac{1}{2}d(x,y)$. Zeige $\mathcal{B}_\varepsilon(x) \cap \mathcal{B}_\varepsilon(y) = \emptyset$ durch einen Widerspruchsbeweis. *Angenommen,* es existiert ein $z \in \mathcal{B}_\varepsilon(x) \cap \mathcal{B}_\varepsilon(y)$. Dann gilt $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \varepsilon + \varepsilon = d(x,y)$, also $d(x,y) < d(x,y)$, was unmöglich ist. Folglich existiert kein solches z.
Die Hausdorff-Eigenschaft ist eine sogenannte *Trennungseigenschaft,* sie gibt an, ob man zwei Punkte durch disjunkte offene ε-Kugeln voneinander trennen kann.
Es ist aufschlußreich, sich für verschiedene metrische Räume zu überlegen, wie die offenen ε-Kugeln aussehen.

Zu Aufgabe 12
(a) Es ist möglich, daß $d(x,y) = 0$ für $x \neq y$ ist. Intuitiv heißt das, daß zwei solche Punkte miteinander identifiziert werden. Formal wird diese Identifikation durch den Raum Y in Teilaufgabe (d) beschrieben.
(b) Wähle $x \neq y$ mit $d(x,y) = 0$. x, y sind durch ε-Kugeln nicht trennbar.
(c) Wähle x, y wie in (b) und eine Folge, die gegen x konvergiert. Diese konvergiert auch gegen y, denn $d(x_n, y) \leq d(x_n, x) + d(x,y) = d(x_n, x) \longrightarrow 0$.
Wir sehen, daß es notwendig war, nachzuweisen, daß Grenzwerte in metrischen Räumen eindeutig sind, da es, wie zum Beispiel in diesem Fall, auch anders sein kann.
(d) Wohldefiniertheit: Für $q \in X_p$ ist $d(q,r) \leq d(q,p) + d(p,r) = d(p,r)$ und ebenso $d(p,r) \leq d(q,r)$. Dasselbe gilt für die zweite Komponente.
In einem X_p werden mehrere Punkte von X zu einer *Äquivalenzklasse* zusammengefasst,

dh. man betrachtet sie sozusagen nur noch als einen einzigen Punkt. Durch diesen Trick wird ein pseudo-metrischer Raum wieder zu einem metrischen Raum.

4 Cauchyfolgen und Vollständigkeit

Um nachzuweisen, daß eine Folge nach Definition 3.2 konvergiert, muß man den Grenzwert der Folge kennen. Es wäre von Vorteil, bestimmen zu können, ob eine Folge konvergiert, ohne daß man andere Punkte als die der Folge selbst heranziehen muß. Dazu betrachten wir *Cauchyfolgen*:

Definition 4.1 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_n) heißt eine *Cauchyfolge*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ für alle $m, n \geq n_0$ ist.

Man mache sich an Beispielen klar, daß zB. jede konvergente Folge in $\mathbb{R}$ eine Cauchyfolge ist.

Eine Cauchyfolge in einem beliebigen metrischen Raum muß nicht zwangsläufig konvergent sein (siehe Beispiel 4.5). Die Umkehrung gilt aber:

Proposition 4.2 Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum X ist eine Cauchyfolge.

Beweis: Seien (x_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert x und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Für $m, n \geq n_0$ ist dann $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Also ist (x_n) eine Cauchyfolge. ■

Wie schon bemerkt, gilt auch die Umkehrung dieser Aussage in manchen metrischen Räumen, zum Beispiel in $\mathbb{R}$. Solche Räume sind für uns von Interesse:

Definition 4.3 Ein metrischer Raum X heißt *vollständig,* wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

In vollständigen metrischen Räumen sind also die konvergenten Folgen genau die Cauchyfolgen.

Es folgt ein Beispiel eines nicht vollständigen metrischen Raumes. Zuvor benötigen wir aber noch ein Hilfsmittel: Die *Summennotation.*

Definition 4.4 Sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir vereinbaren folgende Bezeichnungen:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i := a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

Existiert der Grenzwert der Folge $(\sum_{i=0}^{n} a_i)_{n \in \mathbb{N}}$, so schreiben wir

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i := \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Beispiel 4.5 $\mathbb{Q}$, versehen mit der natürlichen Metrik, ist nicht vollständig.

Beweis: Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, etwa $\alpha = \sqrt{2}$. Dann läßt sich α darstellen in der Form

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 10^{-i}$$

mit $a_i \in \{0, \ldots, 9\} \subseteq \mathbb{Q}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ (Darstellung als „unendlicher Dezimalbruch“). Die Folge

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i 10^{-i} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

ist dann eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ (siehe Aufgabe 16, deren Grenzwert nicht in $\mathbb{Q}$ liegt. ■

Bemerkung 4.6 $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Metrik ist vollständig. Tatsächlich kann man die reellen Zahlen aus den rationalen konstruieren, indem man auf geeignete Weise zu $\mathbb{Q}$ alle Grenzwerte aller Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ hinzufügt.[3] Man sagt deshalb auch, $\mathbb{R}$ sei die *Vervollständigung* von $\mathbb{Q}$. Auf ähnliche Weise lassen sich alle metrischen Räume vervollständigen.

Aufgaben

Aufgabe 13 Sei (X, d) ein diskreter metrischer Raum. Zeige, daß X vollständig ist.

Aufgabe 14 Berechne folgende Summen:

(a)
$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \ldots$$

(b)
$$\sum_{i=1}^{n} i = \ldots$$

(c)
$$\sum_{i=0}^{n} 2^{-i} = \ldots$$

(d)
$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} := \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=0}^{n} 2^{-i} \right) = \ldots$$

[3] Die Durchführung der Konstruktion an dieser Stelle würde zu weit vom Thema abführen.

Aufgabe 15 (a) Zeige durch vollständige Induktion für $x \neq 1$:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

(b) Zeige, daß die Folge der *Partialsummen* $\left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für $-1 < x < 1$ konvergiert, und daß für die *geometrische Reihe* $\sum_{1=0}^{\infty} x^i$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right) = \frac{1}{1-x}.$$

Aufgabe 16 Zeige, daß die Folge

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i 10^{-i}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

aus Beispiel 4.5 eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 17 Sei (X, d) ein quasimetrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt (*vorwärts-*) *Cauchyfolge* wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $n \geq m \geq n_0$ die Distanz $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ ist. Eine Cauchyfolge (x_n) *konvergiert* gegen einen *Grenzwert* $x \in X$ ($x_n \to x$, $\lim x_n = x$) wenn $d(x, y) = \lim d(x_n, y)$ für alle $y \in X$ ist.

(a) Was unterscheidet den Begriff einer Cauchyfolge für quasimetrische Räume von dem einer Cauchyfolge für metrische Räume? Sind vorwärts-Cauchyfolgen in metrischen Räumen automatisch auch Cauchyfolgen im Sinne metrischer Räume?

(b) Zeige, daß Grenzwerte von Cauchyfolgen eindeutig sind.

(c) Was für Eigenschaften haben Cauchyfolgen in $(\mathbb{N}, d_{\geq})$ aus Aufgabe 8 (b)?

(d) Versuche, einen sinnvollen Begriff von *Vollständigkeit* eines quasi-metrischen Raumes zu definieren. Ist der Raum $(\mathbb{N}, d_{\geq})$ aus Teil (c) vollständig? Ist der analog definierte Raum $(\mathbb{N}, d_{\leq})$ vollständig? Ist einer dieser Räume nicht vollständig, so überlege, wie man diesen vervollständigen könnte.

Hinweise zu den Aufgaben

Zu Aufgabe 13

Jede Cauchyfolge in X ist schließlich konstant.

Zu Aufgabe 14

(a) $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$
(b) $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ durch vollständige Induktion.

(c) $\sum_{i=0}^{n} 2^{-i} = 2 - 2^{-n}$ durch vollständige Induktion.
(d) $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} = \lim_{n\to\infty}(2 - 2^{-n}) = 2$

Zu Aufgabe 15
(b) Mit Hilfe von Teil (a) und Aufgabe 10 (b) ist $\lim(1 - x^{n+1}) = 1$ und der Nenner unabhängig von n.

Zu Aufgabe 16
Für $\varepsilon > 10^{-k}$ wähle $n_0 > k$.

Zu Aufgabe 17
(a) Da Quasimetriken nicht symmetrisch sind, ist der Begriff einer vorwärts-Cauchyfolge entsprechend definiert. Ist ein quasimetrischer Raum tatsächlich auch metrisch, so sind beide Definitionen äquivalent.
(b) Seien x, y Grenzwerte der Cauchyfolge (x_n). Dann erhalten wir $d(x, y) = \lim d(x_n, y) = 0$ und $d(y, x) = \lim d(x_n, x) = 0$ Wegen $(M2)$ ist $x = y$.
(c) Für eine solche Cauchyfolge gibt es immer einen Index n_0 so daß $x_n = x_m$ für alle $m, n \geq n_0$ ist. Warum?
(d) Ein quasimetrischer Raum heißt *vollständig* wenn jede Cauchyfolge in ihm einen Grenzwert hat. $(\mathbb{N}, d_{\geq})$ ist vollständig (warum?). $(\mathbb{N}, d_{\leq})$ ist nicht vollständig (warum?). $(\mathbb{N}, d_{\leq})$ kann folgendermaßen vervollständigt werden: Man nehme ein Symbol $\omega \notin \mathbb{N}$ und betrachte die Menge $N = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$. Wir erweitern die Ordnung $\leq$ auf N indem wir $n < \omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$ setzen. Es gilt also $0 < 1 < 2 < \cdots < n < \cdots < \omega$. $N, d_{\leq}$ ist dann vollständig (warum?).

5 Der Kontraktionssatz

In diesem Abschnitt werden wir das Hauptergebnis (Satz 5.3) formulieren und beweisen. Dazu betrachten wir folgende spezielle Abbildungen:

Definition 5.1 (Kontraktion) Eine Abbildung $f : X \longrightarrow X$ eines metrischen Raumes X in sich heißt *kontrahierend* mit *Kontraktionskonstante* λ, $0 \leq \lambda < 1$, wenn $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ ist.

Eine kontrahierende Abbildung rückt also zwei Punkte näher zueinander, und zwar um einen Faktor λ.

Kontrahierende Abbildungen sind Spezialfälle der uns schon bekannten stetigen Abbildungen. Dies zeigt folgende

Proposition 5.2 Jede kontrahierende Abbildung ist stetig.

Beweis: Die Behauptung folgt aus den Definitionen 3.1 der Stetigkeit und 5.1 der kontrahierenden Abbildungen sofort mit $\delta := \frac{\varepsilon}{\lambda}$. ■

Es folgt der wichtige

Satz 5.3 (Kontraktionssatz) Eine kontrahierende Abbildung f eines vollständigen metrischen Raumes in sich besitzt genau einen Fixpunkt, das heißt es existiert genau ein $x \in X$ mit $f(x) = x$.

Die Grundidee des Beweises ist, daß man einen beliebigen Punkt y mit f abbildet und den Bildpunkt wieder mit f abbildet und so weiter. Die Folge der Bildpunkte ist dann eine Cauchyfolge und hat einen Grenzwert. Dieser Grenzwert ist Fixpunkt von f, und zwar der einzige.

Beweis:
Existenz des Fixpunktes:
Sei $f^0 :=$ id die identische Abbildung, $f^1 := f$, $f^n := f(f^{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, die *n-fache Wiederholung von f* und $\lambda < 1$ die Kontraktionskonstante von f.
(1) Zeige: Die Folge $(f^n(y))_{n\geq 1}$ ist eine Cauchyfolge für jedes $y \in X$.
Denn für $y, z \in X$ ist offensichtlich $d(f^n(y), f^n(z)) \leq \lambda^n d(y, z)$ (Aufgabe 18 (a)) und deshalb gilt für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $k := m - n$:

$$\begin{aligned}
d(f^n(y), f^m(y)) &= d(f^n(y), f^{n+k}(y)) \\
&= d(f^n(y), f^n(f^k(y))) \\
&\leq \lambda^n d(y, f^k(y)) \\
&\leq \lambda^n \sum_{i=0}^{k-1} d(f^i(y), f^{i+1}(y)) \text{ (Aufgabe 18 (b))} \\
&= \lambda^n \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i d(y, f(y)) \\
&= \lambda^n d(y, f(y)) \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i \\
&\leq \lambda^n d(y, f(y)) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \\
&= \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(y, f(y)) \qquad \text{(siehe Aufgabe 15 (b))}
\end{aligned}$$

und dies konvergiert gegen 0 für $n \longrightarrow \infty$, woraus die Behauptung folgt.
(2) Da X vollständig ist, hat $(f^n(y))$ einen Grenzwert x. Es folgt

$$f(x) = f(\lim f^n(y)) = \lim f^{n+1}(y) = x$$

nach Proposition 5.2 und Satz 3.3.
Eindeutigkeit des Fixpunktes:
Seien x, y zwei Fixpunkte von f, also $f(x) = x$ und $f(y) = y$. Dann ist

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

Da $\lambda < 1$ ist, folgt $d(x, y) = 0$ und wegen (M1) folgt $x = y$, die Eindeutigkeit des Fixpunktes von f. ∎

Aufgaben

Aufgabe 18 Sei f eine kontrahierende Abbildung eines metrischen Raumes (X, d) in sich mit Kontraktionskonstante $\lambda < 1$. f^n bezeichne die n-fache Wiederholung von f. Zeige durch vollständige Induktion nach n:

(a) Für alle $x, y \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^n d(x, y).$$

(b) Für alle $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$d(x, f^n(x)) \leq \sum_{i=0}^{n-1} d(f^i(x), f^{i+1}(x)).$$

Aufgabe 19 Gib eine stetige Abbildung von $\mathbb{R}$ in sich an, die nicht kontrahierend ist.

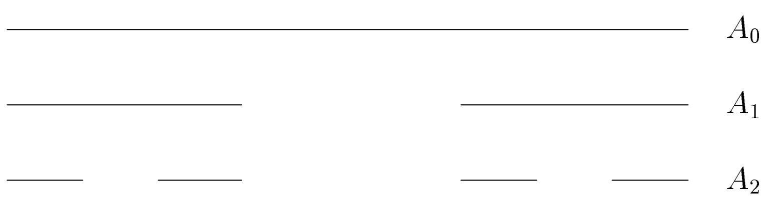
Aufgabe 20 Betrachte den metrischen Raum (Y, d) aus Aufgabe 7.

Zeige:

(a) (Y, d) ist vollständig. Überlege dazu, wie die Cauchyfolgen in (Y, d) aussehen.

(b) Die Abbildung $f : Y \longrightarrow Y : (0, y_1, y_2, \dots) \longmapsto (0, 1, 0, y_1, y_2, \dots)$ ist kontrahierend und hat einen eindeutigen Fixpunkt.

Aufgabe 21 Definiere $A_0 := [0, 1]$, $A_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ und $A_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Induktiv wird für $n > 0$ die Menge A_n so konstruiert, daß von jedem Teilintervall $[a, b]$ der Menge A_{n-1} das mittlere Drittel weggelassen wird, also aus Intervall $I = [a, b]$ in A_{n-1} ein linkes Intervall $I_l = [a, a + \frac{b-a}{3}]$ und ein rechtes Intervall $I_r = [b - \frac{b-a}{3}, b]$ gemacht werden:



Die Menge $\mathcal{C} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ heißt *Cantorsches Diskontinuum.*

Definiere mit Hilfe der Aufgaben 7 und 20 eine Metrik d auf $\mathcal{C}$ und zeige, daß jede bezüglich d kontrahierende Abbildung von $\mathcal{C}$ in sich einen eindeutigen Fixpunkt hat.

Aufgabe 22 Lege eine Karte von Donaueschingen auf den Boden des Hörsaals. Gibt es einen Punkt auf der Karte, der genau dem physikalischen Ort des Punktes im Hörsaal entspricht?

Aufgabe 23 Sei (X, d) ein quasi-metrischer Raum. Eine Funktion $f : X \to X$ heißt (*Cauchyfolgen-*) *stetig* wenn für jede Cauchyfolge (x_n) in X mit $\lim x_n = x$ auch $(f(x_n))$ eine Cauchyfolge und $\lim f(x_n) = f(x)$ ist.

(a) Definiere den Begriff einer *kontrahierenden Abbildung* eines quasi-metrischen Raumes in sich.

(b) Beweise die Aufgabe 18 entsprechenden Eigenschaften kontrahierender Abbildungen. Zeige, daß die Aussagen auch noch für $\lambda = 1$ gelten.

(c) Formuliere den Kontraktionssatz für quasi-metrische Räume und beweise ihn.

Hinweise zu den Aufgaben

Zu Aufgabe 18
(b) Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} d(x, f^{n+1}(x)) &\leq d(x, f^n(x)) + d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} d(f(x), f^{i+1}(x)) + d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \\ &= \sum_{i=0}^{n} d(f(x), f^{i+1}(x)) \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 19
Zum Beispiel ist jede stetige Funktion, deren Graph die erste Winkelhalbierende nicht schneidet, nicht kontrahierend, denn wäre sie kontrahierend, dann hätte sie einen Fixpunkt, das heißt, sie würde die erste Winkelhalbierende schneiden. Weitere Beispiele sind zB. alle Funktionen der Form $(x \longmapsto ax + b)$ mit $a \geq 1$.

Zu Aufgabe 20
(a) Eine anschauliche Hilfe ist durch die Bemerkungen zu Aufgabe 21 gegeben. Dort wird das Cantorsche Diskontinuum als Binärbaum verstanden (siehe den Hinweis zu Aufgabe 7). Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Ästen in Y ist dann eine Cauchyfolge bezüglich d, wenn zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ existiert, so daß alle Äste x_m mit $m \geq n_k$ von der Wurzel bis zum k-ten Nachfolger diese Äste gleich sind. Solche Folgen konvergieren offensichtlich. Formal zeigt man das so: Wir konstruieren ein $y = (0, y_1, y_2, \dots) \in Y$ wie folgt: Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $n_k \in \mathbb{N}$, so daß der k-te Nachfolger $((x_m)_k)$ aller Äste x_m mit $m \geq n_k$ derselbe ist. Wir setzen dann $y_k = (x_m)_k$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann gegen y.

(b) Es ist $d(f(x), f(y)) \leq 2^{-2}d(x, y)$. Die Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunktes von f folgt sofort aus dem Kontraktionssatz 5.3. Durch eine Betrachtung des Beweises kann ein Weg gefunden werden, den Fixpunkt zu bestimmen, nämlich durch wiederholte Anwendung von f auf einen beliebigen Punkt $y = (0, y_1, y_2, \dots) \in Y$. Man erhält dabei
$f(y) = (0, 1, 0, y_1, y_2, \dots)$
$f^2(y) = (0, 1, 0, 1, 0, y_1, y_2, \dots)$
$f^3(y) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, y_1, y_2, \dots)$
und so weiter. Der Grenzwert ist offensichtlich $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n = 0$ für gerades n und $z_n = 1$ für ungerades n.

Zu Aufgabe 21
Eine Bijektion $Y \longrightarrow \mathcal{C}$ findet man so (vergleiche die Hinweise zu den Aufgaben 7 und 20): Interpretiere y_i in $y = (0, y_1, y_2, \dots) \in Y$ so, daß für $y_i \in I$ (I eines der maximal zusammenhängenden Intervalle in A_{i-1}) $y_i = 0$ der Wahl des linken Intervalls I_l und $y_i = 1$ der Wahl des rechten Intervalls I_r (in A_i) entspricht. Nach dieser Zuordnung kann man die Metrik aus Aufgabe 7 genau übertragen, da es sich praktisch um denselben Raum handelt. Die Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunktes von f folgt dann sofort aus Aufgabe 20.

Zu Aufgabe 23
(a) Die Definition ist genau wie im metrischen Fall.
(b),(c) Die Beweise sind genau dieselben wie im metrischen Fall.

6 Verallgemeinerungen

6.1 Pseudo-metrische Räume

Aufgabe 24 Wie lässt sich ein Kontraktionssatz für pseudo-metrische Räume formulieren und beweisen? Stelle zunächst eine sinnvolle Hypothese auf und versuche dann, sie zu beweisen.

Zu Aufgabe 24
In pseudo-metrischen Räumen sind Grenzwerte nicht eindeutig. Es ist also sinnvoll, anzunehmen, daß bei einem für pseudo-metrische Räume formulierten Analogon zum Kontraktionssatz kein eindeutiger Fixpunkt gefunden werden kann. Kann die Existenz eines Fixpunktes unter ähnlichen Bedingungen wie denen des Kontraktionssatzes gewährleistet werden?

Zunächst scheint klar, daß die Definition einer Kontraktion abgeändert werden muß, da für $x \neq y$ mit $d(x, y) = 0$ nicht $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ gelten kann. Wir definieren also: Eine Funktion f auf einem pseudo-metrischen Raum (X, d) heißt eine *(Pseudo-) Kontraktion mit Kontraktionskonstante* λ, falls für alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) \neq 0$ gilt: $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

Dieser naheliegenden Begriff einer Kontraktion ist nun aber nicht mehr stark genug: Sei $X = \{0, 1\}$ eine Menge mit zwei Elementen und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die identisch gleich Null ist. Dann ist die Funktion f, die 0 und 1 vertauscht, eine Kontraktion, hat aber offensichtlich keinen Fixpunkt.

Einen Ausweg aus diesem Dilemma bietet Aufgabe 12 (d). Sei dazu (X, d) ein pseudometrischer Raum und (Y, d_2) der zugehörige metrische Raum aus Aufgabe 12 (d). Eine Pseudo-kontraktion f auf (X, d) ist nun immer eine Kontraktion auf (Y, d_2) (Beweis? Wie versteht man f als Funktion auf Y?) und wenn Y vollständig ist (kann man dazu Bedingungen auf X finden?), dann hat f einen eindeutigen Fixpunkt. Dieser entspricht einer der Mengen X_p wie in Aufgabe 12 (d) definiert (warum?). Mehr lässt sich auf diese Weise wohl nicht gewährleisten.

6.2 Quasi-metrische Räume: Der Satz von Rutten-Smyth

Wir fassen unsere Kenntnisse quasi-metrischer Räume zusammen.

Definition 6.1 Eine Menge X zusammen mit einer Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ heißt ein *quasi-metrischer Raum*, wenn d die Bedingungen (M1) und (M3) erfüllt. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X heißt (*vorwärts-*) *Cauchyfolge* wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $n \geq m \geq n_0$ die Distanz $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ ist. Eine Cauchyfolge (x_n) *konvergiert* gegen einen *Grenzwert* $x \in X$ ($x_n \to x$, $\lim x_n = x$) wenn $d(x, y) = \lim d(x_n, y)$ für alle $y \in X$ ist. Ein quasi-metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in ihm konvergiert.

Proposition 6.2 Grenzwerte von Cauchyfolgen sind eindeutig.

Definition 6.3 Sei (X, d) ein quasi-metrischer Raum. Eine Funktion $f : X \to X$ heißt

1. *(Cauchyfolgen-) stetig*, wenn für jede Cauchyfolge (x_n) in X mit $\lim x_n = x$ auch $(f(x_n))$ eine Cauchyfolge und $\lim f(x_n) = f(x)$ ist.
2. *kontrahierend* mit *Kontraktionskonstante* $0 \leq \lambda < 1$ wenn $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ ist.

In metrischen Räumen ist jede kontrahierende Funktion stetig. Dies gilt in quasimetrischen Räumen nicht mehr im allgemeinen.

Satz 6.4 (Satz von Rutten-Smyth) Sei (X, d) ein vollständiger quasi-metrischer Raum und $f : X \to X$ stetig und kontrahierend. Dann hat f einen eindeutigen Fixpunkt.

Beweis: Der Satz wurde bereits in Aufgabe 23 (c) bewiesen und ist völlig analog zum Beweis des Kontraktionssatzes. ■

Bemerkung 6.5

- Der Satz von Rutten-Smyth wurde zuerst von Smyth in [Smy87] in einem allgemeineren Fall bewiesen. Die hier diskutierte Version wurde von Rutten [Rut95] formuliert und enthält im Original noch einen zweiten Fall, der einen anderen fundamentalen Fixpunktsatz, den Satz von Knaster-Tarski (siehe z.B. [SLG94]), verallgemeinert. Tatsächlich wurde der hier behandelte Teil des Satzes schon in [Mat86] bewiesen.

- Metrische Räume sind von fundamentaler Bedeutung in vielen Bereichen der Mathematik. Der Kontraktionssatz wird oft in speziellerer Form als *Banachscher Fixpunktsatz* auf *normierten Räumen* formuliert und angewandt [HL00].

- Das Studium quasimetrischer Räume erhielt durch Anwendungen in der theoretischen Informatik einen Aufschwung, insbesondere im Bereich Grundlagen der Analyse von Programmiersprachen. Die mathematischen Strukturen, die dort auftreten, sind meist nicht symmetrisch und damit durch Metriken nicht zu erfassen.

- Es ist auch möglich, Verallgemeinerungen oder Varianten des Kontraktionssatzes zu erhalten, indem man die Axiome (M1) bis (M4) unangetastet lässt (oder sogar verschärft) und dafür andere Bedingungen in der Definition eines metrischen Raumes abschwächt. Zum Beispiel kann man den Wertebereich der Abstandsfunktion abändern oder Funktionen betrachten, die mehrere Funktionswerte annehmen können (oder beides — [PR00]). Mischformen dieser mathematischen Strukturen sind auch möglich ([HS00b]).

- Pseudometriken treten in vielen Bereichen der Mathematik natürlicherweise auf, werden aber meist zur Gewinnung einer Metrik (Aufgabe 12) verwendet.

6.3 Verschobene Metriken: Der Fixpunktsatz von Matthews

Definition 6.6 (Verschobene Metrik) Im folgenden nennen wir eine Menge X mit einer Abstandsfunktion d, die die Axiome (M2) bis (M4) erfüllt einen *verschobenen metrischen Raum.* Eine Funktion $f : X \to X$ heißt eine *Kontraktion mit Kontraktionskonstante* $0 \leq \lambda < 1$ wenn $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gilt.

Proposition 6.7 Eine Kontraktion f hat höchstens einen Fixpunkt.

Beweis: Seien $x \neq y$ Fixpunkte von f. Dann ist $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) < d(x, y)$ was nicht der Fall sein kann. Also muss $x = y$ sein. ■

Definition 6.8 Eine Folge (x_n) heißt *konvergent* mit Grenzwert x wenn $\lim d(x_n, x) = 0$ ist.

Proposition 6.9 Grenzwerte in verschobenen metrischen Räumen sind eindeutig.

Beweis: Seien x und y Grenzwerte einer Folge (x_n). Für alle $n \in \mathbb{N}$ erhält man dann mit (M3) und (M4) $d(x,y) \leq d(x_n,x) + d(x_n,y) \to 0$ für $n \to \infty$. Also ist $d(x,y) = 0$ und wegen (M2) und (M3) $x = y$. ■

Definition 6.10 Eine Folge (x_n) heißt eine *Cauchyfolge* wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $m, n \geq n_0$ gilt: $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Proposition 6.11 Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Beweis: Seien (x_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert x und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Für $m, n \geq n_0$ ist dann $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Also ist (x_n) eine Cauchyfolge. ■

Definition 6.12 Ein verschobener metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in ihm konvergiert.

Satz 6.13 Sei (X, d) ein vollständiger verschobener metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante λ. Dann hat f einen eindeutigen Fixpunkt.

Beweis: Falls ein Fixpunkt existiert, so ist er nach Proposition 6.9 eindeutig. Wir zeigen, daß f einen Fixpunkt hat.

Die Ungleichungen aus Aufgabe 15 gelten mit demselben Beweis auch für partiell metrische Räume. Wie im Beweis zum Kontraktionssatz 5.3 erhalten wir eine Cauchyfolge $f^n(y)$ für ein beliebiges $y \in X$. Da X vollständig ist, ist diese Folge konvergent und hat einen eindeutigen Grenzwert x. Es genügt nun zu zeigen, daß x ein Fixpunkt von f ist. Dazu betrachten wir folgende Abschätzung, die für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

$$\begin{aligned} d(f(x), x) &\leq d(f(x), f^n(x)) + d(f^n(x), x) \\ &< d(x, f^{n-1}(x)) + d(f^n(x), x) \\ &\leq d(x, f^{n-1}(y)) + d(f^{n-1}(y), f^{n-1}(x)) + d(f^n(x), f^n(y)) + d(f^n(y), x) \\ &\leq d(x, f^{n-1}(y)) + \lambda^{n-1} d(y, x) + \lambda^n d(x, y) + d(f^n(y), x). \end{aligned}$$

Da nun jeder der Teilterme auf der rechten Seite für $n \to \infty$ gegen Null strebt und die Abschätzung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, erhalten wir $d(f(x), x) = 0$ und deshalb $f(x) = x$ nach (M2) und (M3). ■

Bemerkung 6.14 Es ist mir zu diesem Zeitpunkt noch nicht bekannt, ob Ausführungen wie in Abschnitt 6.3 in der mathematischen Literatur schon behandelt wurden.

7 Ausblicke

Es finden sich naheliegende Möglichkeiten, um ausgehend vom vorliegenden Material weitere Themen zu behandeln.

Durch Einführung des Begriffs des normierten Vektorraumes und Übertragung der Begriffe kann der Banachsche Fixpunktsatz bewiesen werden.

Ausgehend von Beispiel 4.5 kann die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ behandelt werden.

[BS81] folgend können rein topologische Begriffe im Kontext metrischer Räume behandelt werden. Ausgehend von Aufgabe 11 kann die Menge der offenen ε-Kugeln als Basis der zugrundeliegenden Topologie eingeführt werden. Topologische Charakterisierungen der Stetigkeit und der Konvergenz sind dann einfach zu behandeln.

Der nicht behandelte zweite Teil des Satzes von Rutten-Smyth ist auch mit elementaren Methoden erschliessbar ([Hit97a]). Elemantare Grundlagen der Semantik von Programmiersprachen können dann über den Satz von Knaster-Tarski behandelt werden, siehe z.B. [SLG94, Kapitel 2].

Literatur

[Bro92] Th. Bröcker, *Analysis II.* BI, Mannheim, 1992.

[BS81] I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik, Ergänzende Kapitel.* Teubner, Leipzig, 1981.

[Hit97a] P. Hitzler, *Fixpunktsemantik.* In: M. Grimm und G. Kalmbach (Hrsg.), Begabtenförderung im MINT-Bereich 1, Aegis-Verlag, Ulm, 1997, pp. 57-61.

[Hit97b] P. Hitzler, *Der Kontraktionssatz auf metrischen Räumen.* In: M. Grimm und G. Kalmbach (Hrsg), Begabtenförderung im MINT-Bereich 1, Aegis-Verlag, Ulm, 1997, pp. 63-81.

[HL00] P. Hitzler and F. Lutscher, *Der Banachsche Fixpunktsatz und der Satz von Picard-Lindelöf.* In: P. Hitzler und G. Kalmbach (Hrsg.), Begabtenförderung im MINT-Bereich 3, Aegis-Verlag, Ulm, 2000, pp. 31-44.

[HS00a] P. Hitzler und A.K. Seda, *Dislocated Topologies.* Proceedings of the 2nd Slovakian Student Conference in Applied Mathematics, Bratislava, April 2000. Journal of Electrical Engineering, Vol. 51 No. 10/s, Slovak Academy of Sciences (2000), 3-7. To appear.

[HS00b] P. Hitzler und A.K. Seda, *A New Fixed-point Theorem for Logic Programming Semantics.* Proceedings of the joint IIIS & IEEE meeting of the 4th World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics (SCI2000) and the 6th International Conference on Information Systems Analysis and Synthesis (ISAS2000), Orlando, Florida, USA, July, 2000. International Institute of Informatics and Systemics: IIIS, Vol. VII, Computer Science and Engineering Part 1, 2000, pp. 418-423.

[Mat86] S. Matthews, *Metric Domains for Completeness.* Ph.D. Thesis, 1985. Research Report RR76, Department of Computer Science, University of Warwick, UK, 1986.

[PR00] S. Prieß-Crampe und P. Ribenboim, *Ultrametric Spaces and Logic Programming.* Journal of Logic Programming **42** (2000), 59–70.

[Rut95] J.J.M.M. Rutten, *Elements of Generalized Ultrametric Domain Theory*, Theoretical Computer Science **170** (1996), 349–381.

[Smy87] M.B. Smyth, *Quasi Uniformities: Reconciling Domains with Metric Spaces.* In: M. Main, A. Melton, M. Mislove und D. Schmidt (Ed.), Mathematical Foundations of Programming Language Semantics. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 198, Springer, Berlin, 1987, pp. 236–253.

[SLG94] V. Stoltenberg-Hansen, I. Lindström und E. Griffor, *Mathematical Theory of Domains.* Cambridge University Press, 1994.