Kontraktionssätze auf verallgemeinerten metrischen Räumen

Pascal Hitzler

Auf dem Intensivkurs Mathematik 1996 in Donaueschingen wurde von mir ein Kurs mit dem Titel *Der Kontraktionssatz auf metrischen Räumen* gehalten. Eine Ausarbeitung der Vorlesung ist in [Hit97a] erschienen. Für die Kurse 1999 in Donaueschingen und 2000 in Ulm wurde die Vorlesung um einen Abschnitt über Verallgemeinerungen des Kontraktionssatzes erweitert. Diese Erweiterung der Vorlesung wird im Folgenden vorgestellt. Dabei werden wir uns regelmäßig auf [Hit97a] beziehen.

Der Schwerpunkt der Vorlesung liegt weiterhin auf metrischen Räumen und dem Beweis des Kontraktionssatzes. Parallel dazu und im Anschluß daran werden Verallgemeinerungen besprochen, die durch Abschwächungen der eine Metrik definierenden Axiome erhalten werden können. Insbesondere werden Pseudometriken und Quasimetriken behandelt, sowie Konsequenzen des Abschwächens des Axioms der Definitheit in der Definition einer Metrik.

Die Diskussion verallgemeinerter Metriken ist von aktuellem Interesse in der theoretischen Informatik, insbesondere im Bereich denotationeller Semantik von Programmiersprachen. Dort werden vor allem Zusammenhänge zwischen verallgemeinerten Metriken und Ordnungsstrukturen untersucht, um Berechnungsprozesse als quantitative Approximationsprozesse verstehen zu können; klassische Metriken sind für diese Untersuchungen oft nicht allgemein genug.

In der Vorlesung wird nur abstrakte Theorie behandelt. Die wenigen begleitenden Beispiele sind ebenfalls sehr abstrakt. Intuitive Ensicht in das Material soll hauptsächlich durch Behandlung verschiedener verwandter Strukturen erreicht werden. Gleichzeitig soll das Prinzip der Verallgemeinerung in der Mathematik verstanden werden und die Schüler zu der Einsicht kommen, dass nicht nur das Beweisen von Sätzen, sondern auch die Modellierung wesentlicher Bestandteil der Mathematik ist.

Wir ersetzen zunächst die Definition einer Metrik aus [Hit97a, Seite 65]. $\mathbb{R}_0^+$ bezeichne die Menge aller positiven reellen Zahlen einschließlich Null.

Definition
Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt eine *Metrik* auf X, wenn sie für alle $x, , z \in X$ die folgenden Axiome erfüllt:

(M1a) $d(x,x) = 0$

(M1b) Aus $d(x,y) = 0$ und $d(y,x) = 0$ folgt $x = y$.

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)

(M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecksungleichung)

Das Paar (X,d) heißt dann ein *metrischer Raum.*

Wir merken an, dass die Bedingungen (M1a) und (M1b) äquivalent zur Bedingung (M1) aus [Hit97a] sind.

Wir werden nun einige Aufgaben vorstellen, die die Aufgaben in [Hit97a] ergänzen. In ihnen wird – parallel zum Stoff der Vorlesung – der Kontraktionssatz auf quasimetrischen Räumen vorbereitet. Aufgabe 19 kann nach Abschnitt 7.2 (von [Hit97a]), Aufgabe 20 nach Abschnitt 7.4 und Aufgabe 21 nach Abschnitt 7.5 behandelt werden. Die Aufgaben sind zum Teil als Diskussionsgrundlagen zu verstehen.

Aufgabe 19 Eine Menge X zusammen mit einer Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ heißt ein *quasimetrischer Raum,* wenn d die Bedingungen (M1a), (M1b) und (M3) (von [Hit97a]) erfüllt.

(a) Kann man d vernünftigerweise als „Abstandsfunktion" auffassen?

(b) Zeige, dass $(\mathbb{N}, d_{\geq})$ mit $d_{\geq}(m,n) = 0$ für $m \geq n$ und $d_{\geq}(m,n) = 1$ für $m < n$ ein quasimetrischer Raum ist.

(c) Sei (X,d) ein quasimetrischer Raum. Für alle $x,y \in X$ setze $d^*(x,y) = \max\{d(x,y), d(y,x)\}$. Zeige, dass (X,d^*) ein metrischer Raum ist.

Aufgabe 20 Sei (X,d) ein quasimetrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt (*vorwärts-*) *Cauchyfolge,* wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq m \geq n_0$ die Distanz $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ ist. Eine Cauchyfolge (x_n) *konvergiert* gegen einen *Grenzwert* $x \in X$ ($x_n \to x$, $\lim x_n = x$), wenn $d(x,y) = \lim d(x_n, y)$ für alle $y \in X$ ist.

(a) Was unterscheidet den Begriff einer Cauchyfolge für quasimetrische Räume von dem einer Cauchyfolge für metrische Räume? Sind vorwärts-Cauchyfolgen in metrischen Räumen automatisch auch Cauchyfolgen im Sinne metrischer Räume?

(b) Zeige, dass Grenzwerte von Cauchyfolgen eindeutig sind.

(c) Was für Eigenschaften haben Cauchyfolgen in $(\mathbb{N}, d_{\geq})$ aus Aufgabe 19 (b)?

(d) Versuche, einen sinnvollen Begriff von *Vollständigkeit* eines quasimetrischen Raumes zu definieren. Ist der Raum $(\mathbb{N}, d_{\geq})$ aus Teil (c) vollständig? Ist der analog definierte Raum $(\mathbb{N}, d_{\leq})$ vollständig? Ist einer dieser Räume nicht vollständig, so überlege, wie man diesen vervollständigen könnte.

Aufgabe 21 Sei (X, d) ein quasimetrischer Raum. Eine Funktion $f : X \to X$ heißt (*Cauchyfolgen-*) *stetig*, wenn für jede Cauchyfolge (x_n) in X mit $\lim x_n = x$ auch $(f(x_n))$ eine Cauchyfolge und $\lim f(x_n) = f(x)$ ist.

(a) Definiere den Begriff einer *kontrahierenden Abbildung* eines quasimetrischen Raumes in sich.

(b) Beweise die Aufgabe 15 entsprechenden Eigenschaften kontrahierender Abbildungen. Zeige, dass die Aussagen auch noch für $\lambda = 1$ gelten.

(c) Formuliere den Kontraktionssatz für quasimetrische Räume und beweise ihn.

Hinweise zu den Aufgaben

Zu Aufgabe 19
(a) Die Abstandsfunktion d einer Quasimetrik ist nicht symmetrisch. Im wirklichen Leben treten solche „Abstände“ auf, wenn man nicht in Metern misst, sondern z.B. in Aufwand oder Benzinverbrauch etc. So kann man zum Beispiel den „Abstand“ einer Stadt im Tal und einer Bergspitze durch den Zeitaufwand eines Fahradfahrers messen. Ausserdem gibt es einen engen Zusammenhang zwischen Quasimetriken und Ordnungsstrukturen ([Rut95]) — siehe dazu auch Aufgabenteil (b).

Zu Aufgabe 20
(a) Da Quasimetriken nicht symmetrisch sind, ist der Begriff einer vorwärts-Cauchyfolge entsprechend definiert. Ist ein quasimetrischer Raum tatsächlich auch metrisch, so sind beide Definitionen äquivalent.
(b) Seien x, y Grenzwerte der Cauchyfolge (x_n). Dann erhalten wir $d(x, y) = \lim d(x_n, y) = 0$ und $d(y, x) = \lim d(x_n, x) = 0$ Wegen $(M1b)$ ist $x = y$.
(c) Für eine solche Cauchyfolge gibt es immer einen Index n_0 so dass $x_n = x_m$ für alle $m, n \geq n_0$ ist. Warum?
(d) Ein quasimetrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in ihm einen Grenzwert hat. $(\mathbb{N}, d_{\geq})$ ist vollständig (warum?). $(\mathbb{N}, d_{\leq})$ ist nicht vollständig (warum?). $(\mathbb{N}, d_{\leq})$ kann folgendermaßen vervollständigt werden: Man nehme ein Symbol $\omega \notin \mathbb{N}$ und betrachte die Menge $N = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$. Wir erweitern die Ordnung $\leq$ auf N, indem wir $n < \omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$ setzen. Es gilt also $0 < 1 < 2 < \cdots < n < \cdots < \omega$. $(N, d_{\leq})$ ist dann vollständig (warum?).

Zu Aufgabe 21
(a) Die Definition ist genau wie im metrischen Fall.
(b) Die Beweise sind genau dieselben wie im metrischen Fall.
(c) Siehe Satz 6.5.

Der folgende Abschnitt 6 ergänzt [Hit97a] und ist sozusagen als Abschnitt 7.6 in [Hit97a] zu verstehen.

6 Verallgemeinerungen

6.1 Pseudometrische Räume

Aufgabe 22 Wie lässt sich ein Kontraktionssatz für pseudometrische Räume formulieren und beweisen? Stelle zunächst eine sinnvolle Hypothese auf und versuche dann, sie zu beweisen.

Zu Aufgabe 22
In pseudometrischen Räumen sind Grenzwerte nicht eindeutig. Es ist also sinnvoll, anzunehmen, dass bei einem für pseudometrische Räume formulierten Analogon zum Kontraktionssatz kein eindeutiger Fixpunkt gefunden werden kann. Kann die Existenz eines Fixpunktes unter ähnlichen Bedingungen wie denen des Kontraktionssatzes gewährleistet werden?

Zunächst scheint klar, dass die Definition einer Kontraktion abgeändert werden muß, da für $x \neq y$ mit $d(x, y) = 0$ nicht $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ gelten kann. Wir definieren also: Eine Funktion f auf einem pseudometrischen Raum (X, d) heißt eine (*Pseudo-*) *Kontraktion mit Kontraktionskonstante* λ, falls für alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) \neq 0$ gilt: $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

Dieser naheliegenden Begriff einer Kontraktion ist nun aber nicht mehr stark genug: Sei $X = \{0, 1\}$ eine Menge mit zwei Elementen und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die identisch gleich Null ist. Dann ist die Funktion f, die 0 und 1 vertauscht, eine Kontraktion, hat aber offensichtlich keinen Fixpunkt.

Einen Ausweg aus diesem Dilemma bietet Aufgabe 10 (d) aus [Hit97a]. Sei dazu (X, d) ein pseudometrischer Raum und (Y, d_2) der zugehörige metrische Raum aus Aufgabe 10 (d). Eine Pseudokontraktion f auf (X, d) ist nun immer eine Kontraktion auf (Y, d_2) (Beweis? Wie versteht man f als Funktion auf Y?) und wenn Y vollständig ist (kann man dazu Bedingungen auf X finden?), dann hat f einen eindeutigen Fixpunkt. Dieser entspricht einer der Mengen X_p wie in Aufgabe 10 (d) definiert (warum?). Mehr lässt sich auf diese Weise wohl nicht gewährleisten.

Bemerkung 6.1 Pseudometriken treten in vielen Bereichen der Mathematik natürlicherweise auf, werden aber meist zur Gewinnung einer Metrik (Aufgabe 10) verwendet.

6.2 Quasimetrische Räume: Der Satz von Matthews-Rutten-Smyth

Wir fassen unsere Kenntnisse quasimetrischer Räume zusammen.

Definition 6.2 Eine Menge X zusammen mit einer Funktion $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ heißt ein *quasimetrischer Raum*, wenn d die Bedingungen (M1a), (M1b) und (M3) erfüllt. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt (*vorwärts-*) *Cauchyfolge* wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq m \geq n_0$ die Distanz $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ ist. Eine Cauchyfolge (x_n) *konvergiert* gegen einen *Grenzwert* $x \in X$ ($x_n \to x$, $\lim x_n = x$) wenn $d(x, y) = \lim d(x_n, y)$ für alle $y \in X$ ist. Ein quasimetrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in ihm konvergiert.

Proposition 6.3 Grenzwerte von Cauchyfolgen sind eindeutig.

Definition 6.4 Sei (X, d) ein quasimetrischer Raum. Eine Funktion $f : X \to X$ heißt

(a) *(Cauchyfolgen-) stetig*, wenn für jede Cauchyfolge (x_n) in X mit $\lim x_n = x$ auch $(f(x_n))$ eine Cauchyfolge und $\lim f(x_n) = f(x)$ ist.

(b) *kontrahierend* mit *Kontraktionskonstante* $0 \leq \lambda < 1$ wenn $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ ist.

In metrischen Räumen ist jede kontrahierende Funktion stetig. Dies gilt in quasimetrischen Räumen nicht mehr im Allgemeinen. Eine Inspektion des Beweises des Kontraktionssatzes ergibt aber, dass wir dort eine Stetigkeitseigenschaft benützt haben. Wenn wir also voraussetzen, dass die betrachtete Funktion sowohl stetig als auch kontrahierend ist, können wir den Beweis für den Kontraktionssatz vielleicht auch für den quasimetrischen Fall verwenden. Dies ist tatsächlich der Fall.

Satz 6.5 (Satz von Matthews-Rutten-Smyth) Sei (X, d) ein vollständiger quasimetrischer Raum und $f : X \to X$ stetig und kontrahierend. Dann hat f einen eindeutigen Fixpunkt.

Beweis: Der Beweis ist völlig analog zum Beweis des Kontraktionssatzes. ∎

Bemerkung 6.6 Satz 6.5 wurde vermutlich zuerst von Matthews in [Mat86] bewiesen. Die Version von Rutten [Rut95] enthält im Original noch einen zweiten Fall, der einen anderen fundamentalen Fixpunktsatz, den Satz von Knaster-Tarski (siehe z.B. [Hit97b]), verallgemeinert. Smyth in [Smy87] bewies einen allgemeineren Fall.

Der nicht behandelte zweite Teil des Satzes von Rutten ist auch mit elementaren Methoden erschließbar ([Hit97b]). Elementare Grundlagen der Semantik von Programmiersprachen können dann über diesen Satz behandelt werden, siehe z.B. [SLG94, Kapitel 2].

6.3 Verschobene metrische Räume: Der Satz von Matthews

In den vergangenen beiden Abschnitten haben wir über „Abstandsfunktionen“ gesprochen, die durch Weglassen der Axiome (M1b) bzw. (M2) in der Definition einer Metrik entstehen. In diesem Abschnitt werden wir Axiom (M1a) weglassen, d.h. wir erlauben, dass ein Punkt einen „Abstand“ zu sich selbst hat, der ungleich Null ist. Dies ist intuitiv schwieriger zu erfassen als z.B. der asymmetrische Begriff der Quasimetrik. Dennoch werden wir sehen, dass wir einen Satz analog zum Kontraktionssatz formulieren und beweisen können.

Definition 6.7 Im Folgenden nennen wir eine Menge X mit einer Abstandsfunktion d, die die Axiome (M1b), (M2) und (M3) erfüllt, einen *verschobenen metrischen Raum*[1] und d eine *verschobene Metrik*.

Die Verwendung von *verschoben* erklärt sich wie folgt: Wir definieren in einem verschobenen metrischen Raum (X, d) formal eine *ε-Kugel* $B_\varepsilon(x)$ mit *Mittelpunkt* $x \in X$ und *Radius* $\varepsilon \in \mathbb{R}$ als

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\},$$

d.h. wie in [Hit97a, Aufgabe 9]. Für ein $x \in X$ mit $d(x, x) = z \neq 0$ gilt dann $x \notin B_z(x)$. Der Mittelpunkt einer Kugel „liegt“ also möglicherweise „ausserhalb“ der Kugel, d.h. der Mittelpunkt ist gegenüber der Kugel *verschoben*.

Definition 6.8 Eine Funktion $f : X \to X$ heißt eine *Kontraktion mit Kontraktionskonstante* $0 \leq \lambda < 1$, wenn $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ gilt.

Proposition 6.9 Eine Kontraktion f hat höchstens einen Fixpunkt.

Beweis: Seien $x \neq y$ Fixpunkte von f. Dann ist $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) < d(x, y)$ was nicht der Fall sein kann. Also muss $x = y$ sein. ■

Definition 6.10 Eine Folge (x_n) heißt *konvergent* mit Grenzwert x, wenn $\lim d(x_n, x) = 0$ ist.

Proposition 6.11 Grenzwerte in verschobenen metrischen Räumen sind eindeutig.

[1][Mat86]: metric domain. [HS00a]: dislocated metric space.

Beweis: Seien x und y Grenzwerte einer Folge (x_n). Für alle $n \in \mathbb{N}$ erhält man dann mit (M2) und (M3) $d(x,y) \leq d(x_n,x) + d(x_n,y) \to 0$ für $n \to \infty$. Also ist $d(x,y) = 0$ und wegen (M1b) und (M2) $x = y$. ■

Definition 6.12 Eine Folge (x_n) heißt eine *Cauchyfolge*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $m, n \geq n_0$ gilt: $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Proposition 6.13 Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Beweis: Seien (x_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert x und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Für $m, n \geq n_0$ ist dann $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Also ist (x_n) eine Cauchyfolge. ■

Definition 6.14 Ein verschobener metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in ihm konvergiert.

Wie im quasimetrischen Fall haben wir wieder Schwierigkeiten mit dem Stetigkeitsbegriff. Es ist tatsächlich nicht klar, wie ein sinnvoller Stetigkeitsbegriff für verschobene metrische Räume aussehen soll. Das hat tieferliegende Ursachen, die hier nicht besprochen werden können. Wir werden also den Beweis des Kontraktionssatzes für den Fall verschobener Metriken modifizieren müssen und dabei vor allem den Teil, in dem die Stetigkeitseigenschaft verwendet wurde.

Satz 6.15 (Satz von Matthews) Sei (X, d) ein vollständiger verschobener metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante λ. Dann hat f einen eindeutigen Fixpunkt.

Beweis: Falls ein Fixpunkt existiert, so ist er nach Proposition 6.11 eindeutig. Wir zeigen, dass f einen Fixpunkt hat.

Die Ungleichungen aus Aufgabe 15 gelten mit demselben Beweis auch für verschobene metrische Räume. Wie im Beweis zum Kontraktionssatz erhalten wir eine Cauchyfolge $f^n(y)$ für ein beliebiges $y \in X$. Da X vollständig ist, ist diese Folge konvergent und hat einen eindeutigen Grenzwert x. Es genügt nun zu zeigen, dass x ein Fixpunkt von f ist. Dazu betrachten wir folgende Abschätzung, die für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

$$\begin{aligned}
d(f(x), x) &\leq d(f(x), f^n(x)) + d(f^n(x), x) \\
&< d(x, f^{n-1}(x)) + d(f^n(x), x) \\
&\leq d(x, f^{n-1}(y)) + d(f^{n-1}(y), f^{n-1}(x)) + d(f^n(x), f^n(y)) + d(f^n(y), x) \\
&\leq d(x, f^{n-1}(y)) + \lambda^{n-1} d(y, x) + \lambda^n d(x, y) + d(f^n(y), x).
\end{aligned}$$

Da nun jeder der Teilterme auf der rechten Seite für $n \to \infty$ gegen Null strebt und die Abschätzung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, erhalten wir $d(f(x), x) = 0$ und deshalb $f(x) = x$ nach (M1b) und (M2). ■

Satz 6.15 wurde vermutlich zuerst von Matthews in [Mat86] bewiesen.

Bemerkung 6.16 Es ist auch möglich, Verallgemeinerungen oder Varianten des Kontraktionssatzes zu erhalten, indem man die Axiome (M1) bis (M4) unangetastet lässt (oder sogar verschärft) und dafür andere Bedingungen in der Definition eines metrischen Raumes abschwächt. Zum Beispiel kann man den Wertebereich der Abstandsfunktion abändern oder Funktionen betrachten, die mehrere Funktionswerte annehmen können (oder beides — [PR00]).

Aufgaben

Aufgabe 23 Für $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ sei $d(x, y) = \max\{x, y\}$. Zeige, dass $(\mathbb{R}_0^+, d)$ ein vollständiger verschobener metrischer Raum ist.

Aufgabe 24 Für $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ sei $d(x, y) = x + y$. Zeige, dass $(\mathbb{R}_0^+, d)$ ein vollständiger verschobener metrischer Raum ist.

Aufgabe 25 Sei I die Menge aller abgeschlossenen Intervalle reeller Zahlen und definiere $d : I \times I \to \mathbb{R}$ durch

$$d([a, b], [c, d]) = \max\{b, d\} - \min\{a, c\}.$$

Zeige, dass (I, d) ein vollständiger verschobener metrischer Raum ist.

Aufgabe 26 Sei (X, d) ein verschobener metrischer Raum. Definiere $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ durch $d'(x, x) = 0$ für alle x und $d'(x, y) = d(x, y)$ für alle $x \neq y$.

(a) Zeige, dass (X, d') ein metrischer Raum ist.

(b) Zeige, dass (X, d') genau dann vollständig ist, wenn (X, d) vollständig ist.

(c) Sei f eine Kontraktion bezüglich d. Zeige, dass f eine Kontraktion bezüglich d' ist.

(d) Zeige, dass Kontraktionen bezüglich d' nicht notwendigerweise Kontraktionen bezüglich d sein müssen.

(e) Unter Verwendung der Teilaufgaben (a), (b) und (c), beweise Satz 6.15 mit Hilfe des Kontraktionssatzes.

Hinweise zu den Aufgaben

Zu Aufgabe 23
Vollständigkeit: Zeige, dass jede Cauchyfolge gegen 0 konvergiert.

Zu Aufgabe 24
Vollständigkeit: Zeige, dass jede Cauchyfolge gegen 0 konvergiert.

Zu Aufgabe 25
(M1b) Ist $d([a,b],[c,d]) = 0$, so ist $\max\{b,d\} = \min\{a,c\}$ und wegen $a \leq b$ und $c \leq d$ ist $a = b = c = d$.
(M2) klar.
(M3) Zeige zuerst

$$d([a,b],[c,d]) = \frac{1}{2}\left(|a-c| + |b-d|\right) + \frac{1}{2}\left((b-a) + (d-c)\right).$$

Vollständigkeit: Wenn $([a_n, b_n])$ eine Cauchyfolge bezüglich d ist, dann sind (a_n) und (b_n) Cauchyfolgen bezüglich der natürlichen Metrik auf den reellen Zahlen. Da die reellen Zahlen vollständig sind, konvergiert a_n gegen ein a und b_n gegen ein b (tatsächlich ist $a = b$). Das Intervall $[a,b]$ ist dann Grenzwert von $([a_n, b_n])$ in d.

Zu Aufgabe 26

(a) (M3) durch Fallunterscheidung.

(b) Jede Cauchyfolge bezüglich d ist Cauchyfolge bezüglich d'. Umgekehrt ist jede Cauchyfolge bezüglich d' entweder eine Cauchyfolge bezüglich d oder ab einem bestimmten Index konstant.

(c) Wir geben ein Gegenbeispiel an. Sei $X = \{0,1\}$ und $f : X \to X$ so, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in X$ ist. Sei d konstant 1. Dann ist (X,d) ein vollständiger verschobener Raum und f eine Kontraktion bezüglich d'. Doch $d(f(0), f(1)) = d(0,1)$, also ist f keine Kontraktion bezüglich d.

(d) Sei (X,d) ein vollständiger verschobener metrischer Raum und f eine Kontraktion bezüglich d. Dann ist (X,d') ein vollständiger metrischer Raum und f eine Kontraktion bezüglich d'. Nach dem Kontraktionssatz hat also f einen eindeutigen Fixpunkt.

Literatur

[Hit97a] P. Hitzler, *Der Kontraktionssatz auf metrischen Räumen.* In: M. Grimm und G. Kalmbach (Hrsg), Begabtenförderung im MINT-Bereich 1, Aegis-Verlag, Ulm, 1997, pp. 63-81.

[Hit97b] P. Hitzler, *Fixpunktsemantik.* In: M. Grimm und G. Kalmbach (Hrsg), Begabtenförderung im MINT-Bereich 1, Aegis-Verlag, Ulm, 1997, pp. 57–61.

[HS00a] P. Hitzler und A.K. Seda, *Dislocated Topologies.* Journal of Electrical Engineering, Vol. 51 No. 10/s, Slovak Academy of Sciences (2000), 3–7.

[Mat86] S. Matthews, *Metric Domains for Completeness.* PhD Thesis, 1985. Research Report RR76, Department of Computer Science, University of Warwick, UK, 1986.

[PR00] S. Prieß-Crampe und P. Ribenboim, *Ultrametric Spaces and Logic Programming.* The Journal of Logic Programming **42** (2000), 59–70.

[Rut95] J.J.M.M. Rutten, *Elements of Generalized Ultrametric Domain Theory*, Theoretical Computer Science **170** (1996), 349–381.

[Smy87] M.B. Smyth, *Quasi Uniformities: Reconciling Domains with Metric Spaces.* In: M. Main, A. Melton, M. Mislove und D. Schmidt (Ed.), Mathematical Foundations of Programming Language Semantics. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 198, Springer, Berlin, 1987, pp. 236–253.

[SLG94] V. Stoltenberg-Hansen, I. Lindström und E. Griffor, *Mathematical Theory of Domains.* Cambridge University Press, 1994.

Pascal Hitzler studierte Mathematik an der Universität Tübingen, wo er 1998 sein Diplom mit Auszeichnung abschloss. Von 1999 bis 2001 promovierte er in Mathematik an der National University of Ireland, University College Cork, sein Doktorvater ist Anthony Karel Seda. Seit Februar 2001 ist er wissenschaftlicher Mitarbeiter von Prof. Steffen Hölldobler am Institut für Künstliche Intelligenz der Technischen Universität Dresden. Sein wissenschaftliches Hauptinteresse liegt im Bereich mathematischer Grundlagen der Künstlichen Intelligenz. Seit 1996 war er ausserdem an Durchführung und Organisation verschiedener Begabtenförderungsmaßnahmen beteiligt.

Pascal Hitzler
Fachbereich Wissensverarbeitung
Institut für künstliche Intelligenz
Fakultät für Informatik
Technische Universität Dresden
01062 Dresden

E-Mail: phitzler@inf.tu-dresden.de
Web: http://www.wv.inf.tu-dresden.de/~pascal/