Der Kontraktionssatz auf metrischen Räumen

Intensivkurs Mathematik 1996
Pascal Hitzler

Auf dem Intensivkurs Mathematik 1996 in Donaueschingen wurde von mir ein Kurs mit dem Titel „Der Kontraktionssatz auf metrischen Räumen“ gehalten. Er umfaßte drei Doppelstunden Vorlesung und 2 Doppelstunden Übungen. Das vorliegende Kapitel enthält eine Ausarbeitung des Skriptums zum Kurs.

Das Thema wurde von mir ausgewählt, da die Inhalte als Verallgemeinerungen der aus der Schule bekannten Begriffe und Sachverhalte im Raum der reellen Zahlen leicht zu motivieren sind und in kurzer Zeit die Voraussetzungen zum Beweis eines in vielen Bereichen der Mathematik wichtigen Satzes, des Kontraktionssatzes, bzw. des Banachschen Fixpunktsatzes im Spezialfall metrischer Räume, bereitgestellt werden können.

Voraussetzungen für das Verständnis sind Vertrautheit mit den grundlegenden Eigenschaften der reellen Zahlen sowie mit den Begriffen der Funktion und der vollständigen Induktion. Außerdem gehe ich davon aus, daß die Begriffe der Konvergenz von Folgen sowie der Stetigkeit von Funktionen in $\mathbb{R}$ bekannt sind und somit zur Motivation herangezogen werden können.

Im Zuge meiner Ausführungen werden auf natürliche Weise wichtige Begriffe, Sachverhalte und Fragestellungen relevant, im einzelnen:

Stetigkeit
Konvergenz von Folgen
Äquivalenz von Folgenstetigkeit und ε-δ-Stetigkeit
Beweis durch Kontraposition
Widerspruchsbeweis
Cauchyfolgen
Vollständigkeit
Summennotation

In den Übungsaufgaben werden außerdem gestreift:

Archimedische Anordnung von $\mathbb{R}$
Hausdorff-Eigenschaft
Wohldefiniertheit
Äquivalenzklassen

Die 18 Übungsaufgaben beinhalten Beispiele metrischer Räume, leichte Rechenaufgaben zum Einüben der gelernten Begriffe, sowie weiterführende Fragestellungen. Den Aufgabenteilen folgt jeweils ein Abschnitt mit Hinweisen, Lösungsansätzen und Erläuterungen zu den Aufgaben.

Inhaltsverzeichnis

Einführung

In diesem Kurs werden wir metrische Räume betrachten; das sind Mengen, bei denen zu je zwei Elementen (*Punkten*) ein *Abstand* zugeordnet werden kann. Ein einfaches Beispiel sind die reellen Zahlen, wobei der Abstand zweier Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gleich $|x-y|$ ist. Wir werden sehen, daß viele von den reellen Zahlen bekannte Begriffe, wie Konvergenz von Folgen oder Stetigkeit von Funktionen, fast wortwörtlich auf metrische Räume übertragen und dadurch verallgemeinert werden können.

1 Metrische Räume

Wir wollen einen sinnvollen Begriff von dem, was ein Abstand zwischen zwei Punkten sein soll, mathematisch präzise formulieren. Es ist einleuchtend, daß ein Punkt zu sich selbst und nur zu sich selbst den Abstand 0 haben soll. Außerdem soll der Abstand zweier Punkte unabhängig davon sein, von welchem der Punkte aus man ihn mißt. Als drittes wollen wir noch verlangen, daß, faßt man drei gegebene Punkte als Ecken eines

Dreiecks auf, je zwei Seiten dieses Dreiecks zusammen länger sein sollen als die jeweils dritte. Wir definieren also den Begriff der *Abstandsfunktion* oder *Metrik*:

Definition 1.1 (Metrik) Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt eine *Metrik* auf X, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:
(M1) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Das Paar (X, d) heißt dann ein *metrischer Raum.*

Wir geben einige Beispiele für metrische Räume. Der Nachweis, daß es sich wirklich um solche handelt, ist einfach und Inhalt der Übungsaufgabe 1.

Beispiel 1.2 (a) Sei $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : d(x, y) := |x - y|$. Dann ist $(\mathbb{R}, d)$ ein metrischer Raum. d heißt die *natürliche Metrik* auf $\mathbb{R}$.
(b) $\mathbb{Q}$, versehen mit derselben Metrik wie in (a), ist ein metrischer Raum.
(c) Sei X eine Menge und $d(x, y) = 1$ für $x \neq y$ und $d(x, x) = 0$ für alle $x, y \in X$. Dann ist (X, d) ein metrischer Raum. d heißt die *diskrete Metrik* auf X.

Die Metrik in Beispiel (c) drückt einfach aus, ob zwei Punkte $x, y \in X$ in Wirklichkeit derselbe Punkt sind oder nicht.

Der Abstand zweier Punkte soll natürlich nie negativ werden. Daß dies gewährleistet ist, zeigt

Proposition 1.3 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Es ist $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$.

Beweis: Seien $x, y \in X$. Dann ist $0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2 \cdot d(x, y)$, also $0 \leq d(x, y)$. ■

Aufgaben

Aufgabe 1 Zeige, daß die Räume in Beispiel 1.2 tatsächlich metrisch sind.

Aufgabe 2 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige: $|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$.

Aufgabe 3 Sei $X := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} : d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Zeige: (X, d) ist ein metrischer Raum.
Warum nennt man d die *New-York-Metrik*?

Aufgabe 4 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $d_1(x, y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ für $x, y \in X$. Zeige: (X, d_1) ist ein metrischer Raum.

Aufgabe 5 Seien $n \in \mathbb{N}$ und $X = \{0,1\}$. Für $a = (a_1, \dots, a_n) \in X^n$ und $b = (b_1, \dots, b_n) \in X^n$ sei $d_n(a,b) := |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n|$. Zeige: (X^n, d_n) ist ein metrischer Raum für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6 Seien $X = \{0,1\}$ und Y die Menge aller Folgen in X, die mit 0 beginnen, das heißt für ein $y \in Y$ ist $y = (y_0, y_1, y_2, \dots)$ mit $y_n \in X$ für $n \in \mathbb{N}$ und $y_0 = 0$. Für $x = (x_0, x_1, \dots), y = (y_0, y_1, \dots) \in Y$ setze

$$d(x,y) := \inf\{2^{-n} \mid \ x_m = y_m \text{ für alle } m \leq n\}.$$

Zeige, daß (Y, d) ein metrischer Raum ist.

Hinweise zu den Aufgaben

Zu Aufgabe 1
(a),(b): Dreiecksungleichung: Zunächst wird durch Fallunterscheidung gezeigt, daß $|x + y| \leq |x| + |y|$ ist. Dann folgt $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |y - z|$.

Zu Aufgabe 2
$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$, also $d(x,y) - d(y,z) \leq d(x,z)$. Ebenso $d(y,z) - d(x,y) \leq d(x,z)$.

Zu Aufgabe 3
Dreiecksungleichung: Mit Aufgabe 1 (a) folgt

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|.$$

Stellt man sich zwei Punkte $x, y \in X$ in einem Koordinatensystem dargestellt vor, so ist $d(x,y)$ gleich der Abszissendifferenz plus der Ordinatendifferenz. In einer Stadt mit geraden, rechtwinklig zueinander verlaufenden Straßen („New York“) entspricht dies genau der Strecke, die man zurücklegen muss, um von dem einen Punkt zum anderen zu gelangen.

Zu Aufgabe 4
Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} &= \left(\frac{1+d(x,y)}{d(x,y)}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{d(x,y)} + 1\right)^{-1} \leq \left(\frac{1}{d(x,z)+d(z,y)} + 1\right)^{-1} \\
&= \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\
&\leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}
\end{aligned}$$

Zu Aufgabe 5
Die Dreiecksungleichung zeigt man im wesentlichen wie in Aufgabe 3. $d_n(a, b)$ ist die Anzahl der *verschiedenen* Komponenten der beiden Vektoren a und b.

Zu Aufgabe 6
Diese Aufgabe ist vorbereitend für die Aufgaben 17 und 18. $x = (0, x_1, x_2, \dots) \in X$ kann verstanden werden als ein Ast in einem (unendlichen und echten) Binärbaum. [1] Dabei interpretiert man $x_i = 0$ als linken, $x_i = 1$ als rechten Nachfolger von x_{i-1} und $x_0 = 0$ als Wurzel. Für zwei Äste $x, y \in X$ beschreibt $d(x, y)$, in wie vielen aufeinanderfolgenden Knoten, von der Wurzel an gerechnet, x und y übereinstimmen. (X, d) ist Beispiel für einen *Ultrametrischen Raum*, in dem sogar die *starke Dreiecksungleichung* $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$ gilt. Diese sieht man sofort durch Betrachtung eines Binärbaumes ein. Formal zeigt man die starke Dreiecksungleichung so: Ist $d(x, y) = 0$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $d(x, y) = 2^{-n}$, das heißt $x_m = y_m$ für alle $m \leq n$ und $x_{n+1} \neq y_{n+1}$ Sei nun $z = (z_0, z_1, \dots) \in Y$ beliebig. Dann ist $z_{n+1} \neq x_{n+1}$ oder $z_{n+1} \neq y_{n+1}$, dh. es ist $d(x, z) \geq 2^{-n}$ oder $d(y, z) \geq 2^{-n}$ und es folgt die Behauptung.

2 Stetigkeit und Konvergenz

Eine Metrik gibt uns ein quantitatives Maß für die Nähe zweier Punkte. Uns interessieren nun Funktionen mit metrischen Räumen als Definitions- und Wertebereich, die die Eigenschaft haben, daß für zwei Punkte, die Nahe beieinander liegen, auch die Bilder dieser beiden Punkte nahe beieinander liegen. Solche Funktionen nennt man *stetige* Funktionen:

Definition 2.1 Seien (X, d), (Y, d') metrische Räume. Eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ heißt *stetig in* a $(\in X)$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle $x \in X$ mit $d(x, a) < \delta$ gilt: $d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$.
f heißt *stetig*, wenn f stetig in a für alle $a \in X$ ist.

Man mache sich klar, daß für $X = Y = \mathbb{R}$ die stetigen Funktionen genau die sind, deren Graph zusammenhängend ist.

Mit Hilfe einer Metrik können wir auch sagen, was es heißt, daß eine Folge von Punkten sich einem Punkt annähert, dh. gegen diesen *konvergiert*. Dies soll dann der Fall sein, wenn die Folge dem Punkt beliebig nahe kommt:

Definition 2.2 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in X$ für alle n, heißt *konvergent* gegen den *Grenzwert* $x \in X$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $d(x_n, x) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ ist. Man schreibt dann auch $x_n \longrightarrow x$.

[1] Der Begriff des Binärbaums wird zur Erläuterung und zum besseren Verständnis der Aufgaben 6 und 17 herangezogen. Er wird in diesem Zusammenhang nicht erklärt.

Beispiele findet man in Übungsaufgabe 8.

Der folgende Satz zeigt, wie man Stetigkeit von Funktionen mit Hilfe von Folgenkonvergenz charakterisieren kann:

Satz 2.3 Seien (X, d), (Y, d') metrische Räume. $f : X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit Grenzwert x auch $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in Y mit Grenzwert $f(x)$ ist.

Beweis: „$\Longrightarrow$" Sei $x_n \longrightarrow x$ in X und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, sodaß $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für alle $y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$ ist. Da (x_n) gegen x konvergiert, existiert außerdem ein n_0, so daß $d(x, x_n) < \delta$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Es folgt also $d(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, konvergiert $(f(x_n))$ gegen $f(x)$.
„$\Longleftarrow$" Sei f *nicht* stetig, z.B. in $x \in X$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodaß für alle $\delta > 0$ ein x_δ existiert mit $d(x_\delta, x) < \delta$ und $d(f(x_\delta), f(x)) \geq \varepsilon$. Betrachte die Folge $(x_{\delta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\delta_n = \frac{1}{n}$. Offensichtlich konvergiert (x_{δ_n}) gegen x, aber $(f(x_{\delta_n}))$ nicht gegen $f(x)$. Dies zeigt die Behauptung. ∎

Der zweite Teil des obigen Beweises ist ein Beispiel für einen *indirekten Beweis* (*Beweis durch Kontraposition*): Wenn man zeigen will, daß aus einer Aussage A eine Aussage B folgt, kann man statt dessen auch zeigen, daß, falls B *nicht* gilt, auch A nicht gelten kann.

Wir haben in Definition 2.2 definiert, wann ein Punkt Grenzwert einer Folge ist. Nun wäre es ja denkbar, daß eine Folge mehrere Grenzwerte hat (siehe dazu Aufgabe 10). Wir können aber beweisen, daß Grenzwerte von Folgen immer eindeutig sind:

Proposition 2.4 Der in Definition 2.2 definierte Grenzwert ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $x_n \longrightarrow x$ und $x_n \longrightarrow y$. *Annahme:* $x \neq y$. Dann ist $d(x, y) =: \varepsilon > 0$ nach Proposition 1.3 und (M1). Außerdem existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Sei $m \geq n_0$. Dann ist $\varepsilon = d(x, y) \leq d(x, x_m) + d(x_m, y) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, also $\varepsilon < \varepsilon$, was unmöglich ist. Also ist $x = y$. ∎

Dieser Beweis ist Beispiel für einen *Widerspruchsbeweis*: Um zu zeigen, daß eine Aussage B gilt, kann man auch annehmen, daß B nicht gilt und dies zum Widerspruch führen, das heißt, eine unmögliche Aussage daraus folgern.

Da wir jetzt wissen, daß Grenzwerte von Folgen eindeutig sind, können wir vereinbaren:

Notation 2.5 Konvergiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Punkt x, so schreibt man auch $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, abkürzend $\lim x_n = x$.

Aufgaben

Aufgabe 7 Gegeben sei $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Metrik. Zeige, daß die Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ : x \longmapsto |x|$ stetig ist. Dabei sei $\mathbb{R}_+$ die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Aufgabe 8 Betrachte $\mathbb{R}$, versehen mit der natürlichen Metrik.

(a) Seien $x_n := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ gegen 0.

(b) Sei $0 \leq \lambda < 1$. Zeige: $\lim_{n \to \infty} \lambda^n = 0$.

Aufgabe 9 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ sei $\mathcal{B}_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ die *offene ε-Kugel um x*. Zeige die folgende *Hausdorff-Eigenschaft* des Raumes X: Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $\mathcal{B}_\varepsilon(x) \cap \mathcal{B}_\varepsilon(y) = \emptyset$ ist.

Aufgabe 10 Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt eine *Pseudo-Metrik* auf X, wenn für alle $x, y \in X$ gilt:

(PM1) $\quad d(x, x) = 0$

(M2) $\quad d(x, y) = d(y, x)$

(M3) $\quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

(a) Was unterscheidet eine Pseudo-Metrik von einer Metrik?

(b) Definiere die offenen ε-Kugeln um $x \in X$ für $\varepsilon > 0$ wie in Aufgabe 9: $\mathcal{B}_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$.
Zeige, daß die Hausdorff-Eigenschaft in pseudo-metrischen Räumen im allgemeinen nicht gilt. Gib dazu ein Gegenbeispiel an.

(c) Definiere den Begriff der Konvergenz wie in Definition 2.2: Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in X$ für alle n, heißt *konvergent* gegen den *Grenzwert* $x \in X$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $d(x_n, x) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ ist.
Zeige, daß in einem pseudo-metrischen Raum eine Folge gegen zwei verschiedene Punkte konvergieren kann.

(d) Definiere $X_p := \{q \in X \mid d(q, p) = 0\}$ und die Menge $Y := \{X_p \mid p \in X\}$. Zeige: Die Abbildung $d_2 : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R} : d_2(X_p, X_r) := d(p, r)$ ist eine *wohldefinierte* Metrik auf Y, dh. $d_2(X_p, X_r)$ ist durch obige Definition eindeutig bestimmt, dh. wenn $X_p = X_q$ und $X_r = X_s$ ist, dann ist auch $d(p, r) = d(q, s)$.

Hinweise zu den Aufgaben

Zu Aufgabe 7
Benutze Definition 2.1 und wähle $\delta := \varepsilon$.

Zu Aufgabe 8
(a) Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dies ist möglich, da $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet ist.
(b) Wähle $n_0 > \frac{\log \varepsilon}{\log \lambda}$, dann ist $\lambda^n < \varepsilon$.

Zu Aufgabe 9
Seien $x, y \in X$. Wähle $\varepsilon := \frac{1}{2}d(x,y)$. Zeige $\mathcal{B}_\varepsilon(x) \cap \mathcal{B}_\varepsilon(y) = \emptyset$ durch einen Widerspruchsbeweis. *Angenommen,* es existiert ein $z \in \mathcal{B}_\varepsilon(x) \cap \mathcal{B}_\varepsilon(y)$. Dann gilt $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \varepsilon + \varepsilon = d(x,y)$, also $d(x,y) < d(x,y)$, was unmöglich ist. Folglich existiert kein solches z.
Die Hausdorff-Eigenschaft ist eine sogenannte *Trennungseigenschaft*, sie gibt an, ob man zwei Punkte durch disjunkte offene ε-Kugeln voneinander trennen kann.
Es ist aufschlußreich, sich für verschiedene metrische Räume zu überlegen, wie die offenen ε-Kugeln aussehen.

Zu Aufgabe 10
(a) Es ist möglich, daß $d(x,y) = 0$ für $x \neq y$ ist.
(b) Wähle $x \neq y$ mit $d(x,y) = 0$. x, y sind durch ε-Kugeln nicht trennbar.
(c) Wähle x, y wie in (b) und eine Folge, die gegen x konvergiert. Diese konvergiert auch gegen y, denn $d(x_n, y) \leq d(x_n, x) + d(x,y) = d(x_n, x) \longrightarrow 0$.
Wir sehen, daß es notwendig war, nachzuweisen, daß Grenzwerte in metrischen Räumen eindeutig sind, da es, wie zum Beispiel in diesem Fall, auch anders sein kann.
(d) Wohldefiniertheit: Für $q \in X_p$ ist $d(q,r) \leq d(q,p) + d(p,r) = d(p,r)$ und ebenso $d(p,r) \leq d(q,r)$. Dasselbe gilt für die zweite Komponente.
In einem X_p werden mehrere Punkte von X zu einer *Äquivalenzklasse* zusammengefasst, dh. man betrachtet sie sozusagen nur noch als einen einzigen Punkt. Durch diesen Trick wird ein pseudo-metrischer Raum wieder zu einem metrischen Raum.

3 Cauchyfolgen und Vollständigkeit

Um nachzuweisen, daß eine Folge nach Definition 2.2 konvergiert, muß man den Grenzwert der Folge kennen. Es wäre von Vorteil, bestimmen zu können, ob eine Folge konvergiert, ohne daß man andere Punkte als die der Folge selbst heranziehen muß. Dazu betrachten wir *Cauchyfolgen*:

Definition 3.1 Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_n) heißt eine *Cauchyfolge*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ für alle $m, n \geq n_0$ ist.

Man mache sich an Beispielen klar, daß zB. jede konvergente Folge in $\mathbb{R}$ eine Cauchyfolge ist.

Eine Cauchyfolge in einem beliebigen metrischen Raum muß nicht zwangsläufig konvergent sein (siehe Beispiel 3.5). Die Umkehrung gilt aber:

Proposition 3.2 Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum X ist eine Cauchyfolge.

Beweis: Seien (x_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert x und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Für $m, n \geq n_0$ ist dann $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Also ist (x_n) eine Cauchyfolge. ■

Wie schon bemerkt, gilt auch die Umkehrung dieser Aussage in manchen metrischen Räumen, zum Beispiel in $\mathbb{R}$. Solche Räume sind für uns von Interesse:

Definition 3.3 Ein metrischer Raum X heißt *vollständig,* wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

In vollständigen metrischen Räumen sind also die konvergenten Folgen genau die Cauchyfolgen.

Es folgt ein Beispiel eines nicht vollständigen metrischen Raumes. Zuvor benötigen wir aber noch ein Hilfsmittel: Die *Summennotation.*

Definition 3.4 Sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir vereinbaren folgende Bezeichnungen:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i := a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

Existiert der Grenzwert der Folge $(\sum_{i=0}^{n} a_i)_{n \in \mathbb{N}}$, so schreiben wir

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i := \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Beispiel 3.5 $\mathbb{Q}$, versehen mit der natürlichen Metrik, ist nicht vollständig.

Beweis: Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, etwa $\alpha = \sqrt{2}$. Dann läßt sich α darstellen in der Form

$$\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 10^{-i}$$

mit $a_i \in \{0, \ldots, 9\} \subseteq \mathbb{Q}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ (Darstellung als „unendlicher Dezimalbruch“). Die Folge

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i 10^{-i} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

ist dann eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ (siehe Aufgabe 14, deren Grenzwert nicht in $\mathbb{Q}$ liegt. ■

Bemerkung 3.6 $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Metrik ist vollständig. Tatsächlich kann man die reellen Zahlen aus den rationalen konstruieren, indem man auf geeignete Weise zu $\mathbb{Q}$ alle Grenzwerte aller Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ hinzufügt.[2] Man sagt deshalb auch, $\mathbb{R}$ sei die *Vervollständigung* von $\mathbb{Q}$. Auf ähnliche Weise lassen sich alle metrischen Räume vervollständigen.

Aufgaben

Aufgabe 11 Sei (X, d) ein diskreter metrischer Raum. Zeige, daß X vollständig ist.

Aufgabe 12 Berechne folgende Summen:

(a)
$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \ldots$$

(b)
$$\sum_{i=1}^{n} i = \ldots$$

(c)
$$\sum_{i=0}^{n} 2^{-i} = \ldots$$

(d)
$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} 2^{-i} \right) = \ldots$$

Aufgabe 13 (a) Zeige durch vollständige Induktion für $x \neq 1$:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

(b) Zeige, daß die Folge der *Partialsummen* $\left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für $-1 < x < 1$ konvergiert, und daß für die *geometrische Reihe* $\sum_{1=0}^{\infty} x^i$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} x^i \right) = \frac{1}{1-x}.$$

[2] Die Durchführung der Konstruktion an dieser Stelle würde zu weit vom Thema abführen.

Aufgabe 14 Zeige, daß die Folge

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i 10^{-i}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

aus Beispiel 3.5 eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}$ ist.

Hinweise zu den Aufgaben

Zu Aufgabe 11
Jede Cauchyfolge in X ist schließlich konstant.

Zu Aufgabe 12
(a) $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$
(b) $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ durch vollständige Induktion.
(c) $\sum_{i=0}^{n} 2^{-i} = 2 - 2^{-n}$ durch vollständige Induktion.
(d) $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} = \lim_{n\to\infty}(2 - 2^{-n}) = 2$

Zu Aufgabe 13
(b) Mit Hilfe von Teil (a) und Aufgabe 8 (b) ist $\lim(1 - x^{n+1}) = 1$ und der Nenner unabhängig von n.

Zu Aufgabe 14
Für $\varepsilon > 10^{-k}$ wähle $n_0 > k$.

4 Der Kontraktionssatz

In diesem letzten Abschnitt werden wir das Hauptergebnis (Satz 4.3) formulieren und beweisen. Dazu betrachten wir folgende spezielle Abbildungen:

Definition 4.1 Eine Abbildung $f : X \longrightarrow X$ eines metrischen Raumes X in sich heißt *kontrahierend* mit *Kontraktionskonstante* λ, $0 \leq \lambda < 1$, wenn $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ ist.

Eine kontrahierende Abbildung rückt also zwei Punkte näher zueinander, und zwar um einen Faktor λ.

Kontrahierende Abbildungen sind Spezialfälle der uns schon bekannten stetigen Abbildungen. Dies zeigt folgende

Proposition 4.2 Jede kontrahierende Abbildung ist stetig.

Beweis: Die Behauptung folgt aus den Definitionen 2.1 der Stetigkeit und 4.1 der kontrahierenden Abbildungen sofort mit $\delta := \frac{\varepsilon}{\lambda}$. ■

Es folgt der wichtige

Satz 4.3 (Kontraktionssatz) Eine kontrahierende Abbildung f eines vollständigen metrischen Raumes in sich besitzt genau einen Fixpunkt, das heißt es existiert genau ein $x \in X$ mit $f(x) = x$.

Die Grundidee des Beweises ist, daß man einen beliebigen Punkt y mit f abbildet und den Bildpunkt wieder mit f abbildet und so weiter. Die Folge der Bildpunkte ist dann eine Cauchyfolge und hat einen Grenzwert. Dieser Grenzwert ist Fixpunkt von f, und zwar der einzige.

Beweis:
Existenz des Fixpunktes:
Sei $f^0 :=$ id die identische Abbildung, $f^1 := f$, $f^n := f(f^{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, die *n-fache Wiederholung von f* und $\lambda < 1$ die Kontraktionskonstante von f.
(1) Zeige: Die Folge $(f^n(y))_{n\geq 1}$ ist eine Cauchyfolge für jedes $y \in X$.
Denn für $y, z \in X$ ist offensichtlich $d(f^n(y), f^n(z)) \leq \lambda^n d(y, z)$ (Aufgabe 15 (a)) und deshalb gilt für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $k := m - n$:

$$\begin{aligned}
d(f^n(y), f^m(y)) &= d(f^n(y), f^{n+k}(y)) \\
&= d(f^n(y), f^n(f^k(y))) \\
&\leq \lambda^n d(y, f^k(y)) \\
&\leq \lambda^n \sum_{i=0}^{k-1} d(f^i(y), f^{i+1}(y)) \text{ (Aufgabe 15 (b))} \\
&= \lambda^n \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i d(y, f(y)) \\
&= \lambda^n d(y, f(y)) \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i \\
&\leq \lambda^n d(y, f(y)) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \\
&= \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(y, f(y)) \qquad \text{(siehe Aufgabe 13 (b))}
\end{aligned}$$

und dies konvergiert gegen 0 für $n \longrightarrow \infty$, woraus die Behauptung folgt.
(2) Da X vollständig ist, hat $(f^n(y))$ einen Grenzwert x. Es folgt

$$f(x) = f(\lim f^n(y)) = \lim f^{n+1}(y) = x$$

nach Proposition 4.2 und Satz 2.3.
Eindeutigkeit des Fixpunktes:
Seien x, y zwei Fixpunkte von f, also $f(x) = x$ und $f(y) = y$. Dann ist

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y).$$

Da $\lambda < 1$ ist, folgt $d(x, y) = 0$ und wegen (M1) folgt $x = y$, die Eindeutigkeit des Fixpunktes von f. ■

Aufgaben

Aufgabe 15 Sei f eine kontrahierende Abbildung eines metrischen Raumes (X, d) in sich mit Kontraktionskonstante $\lambda < 1$. f^n bezeichne die n-fache Wiederholung von f. Zeige durch vollständige Induktion nach n:

(a) Für alle $x, y \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \lambda^n d(x, y).$$

(b) Für alle $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$d(x, f^n(x)) \leq \sum_{i=0}^{n-1} d(f^i(x), f^{i+1}(x)).$$

Aufgabe 16 Gib eine stetige Abbildung von $\mathbb{R}$ in sich an, die nicht kontrahierend ist.

Aufgabe 17 Betrachte den metrischen Raum (Y, d) aus Aufgabe 6.

Zeige:

(a) (Y, d) ist vollständig. Überlege dazu, wie die Cauchyfolgen in (Y, d) aussehen.

(b) Die Abbildung $f : Y \longrightarrow Y : (0, y_1, y_2, \dots) \longmapsto (0, 1, 0, y_1, y_2, \dots)$ ist kontrahierend und hat einen eindeutigen Fixpunkt.

Aufgabe 18 Definiere $A_0 := [0, 1]$, $A_1 := [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ und $A_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Induktiv wird für $n > 0$ die Menge A_n so konstruiert, daß von jedem Teilintervall $[a, b]$ der Menge A_{n-1} das mittlere Drittel weggelassen wird, also aus Intervall $I = [a, b]$ in A_{n-1} ein linkes Intervall $I_l = [a, a + \frac{b-a}{3}]$ und ein rechtes Intervall $I_r = [b - \frac{b-a}{3}, b]$ gemacht werden:

Die Menge $\mathcal{C} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ heißt *Cantorsches Diskontinuum.*

Definiere mit Hilfe der Aufgaben 6 und 17 eine Metrik d auf $\mathcal{C}$ und zeige, daß jede bezüglich d kontrahierende Abbildung von $\mathcal{C}$ in sich einen eindeutigen Fixpunkt hat.

Hinweise zu den Aufgaben

Zu Aufgabe 15
(b) Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} d(x, f^{n+1}(x)) &\leq d(x, f^n(x)) + d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} d(f(x), f^{i+1}(x)) + d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \\ &= \sum_{i=0}^{n} d(f(x), f^{i+1}(x)) \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 16
Zum Beispiel ist jede stetige Funktion, deren Graph die erste Winkelhalbierende nicht schneidet, nicht kontrahierend, denn wäre sie kontrahierend, dann hätte sie einen Fixpunkt, das heißt, sie würde die erste Winkelhalbierende schneiden. Weitere Beispiele sind zB. alle Funktionen der Form $(x \longmapsto ax + b)$ mit $a \geq 1$.

Zu Aufgabe 17
(a) Eine anschauliche Hilfe ist durch die Bemerkungen zu Aufgabe 18 gegeben. Dort wird das Cantorsche Diskontinuum als Binärbaum verstanden (siehe den Hinweis zu Aufgabe 6). Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Ästen in Y ist dann eine Cauchyfolge bezüglich d, wenn zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ existiert, so daß alle Äste x_m mit $m \geq n_k$ von der Wurzel bis zum k-ten Nachfolger diese Äste gleich sind. Solche Folgen konvergieren offensichtlich. Formal zeigt man das so: Wir konstruieren ein $y = (0, y_1, y_2, \dots) \in Y$ wie folgt: Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $n_k \in \mathbb{N}$, so daß der k-te Nachfolger $((x_m)_k)$ aller Äste x_m mit $m \geq n_k$ derselbe ist. Wir setzen dann $y_k = (x_m)_k$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann gegen y.
(b) Es ist $d(f(x), f(y)) \leq 2^{-2} d(x, y)$. Die Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunktes von f folgt sofort aus dem Kontraktionssatz 4.3. Durch eine Betrachtung des Beweises kann ein Weg gefunden werden, den Fixpunkt zu bestimmen, nämlich durch wiederholte

Anwendung von f auf einen beliebigen Punkt $y = (0, y_1, y_2, \dots) \in Y$. Man erhält dabei
$f(y) = (0, 1, 0, y_1, y_2, \dots)$
$f^2(y) = (0, 1, 0, 1, 0, y_1, y_2, \dots)$
$f^3(y) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, y_1, y_2, \dots)$
und so weiter. Der Grenzwert ist offensichtlich $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n = 0$ für gerades n und $z_n = 1$ für ungerades n.

Zu Aufgabe 18
Eine Bijektion $Y \longrightarrow \mathcal{C}$ findet man so (vergleiche die Hinweise zu den Aufgaben 6 und 17): Interpretiere y_i in $y = (0, y_1, y_2, \dots) \in Y$ so, daß für $y_i \in I$ (I eines der maximal zusammenhängenden Intervalle in A_{i-1}) $y_i = 0$ der Wahl des linken Intervalls I_l und $y_i = 1$ der Wahl des rechten Intervalls I_r (in A_i) entspricht. Nach dieser Zuordnung kann man die Metrik aus Aufgabe 6 genau übertragen, da es sich praktisch um denselben Raum handelt. Die Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunktes von f folgt dann sofort aus Aufgabe 17.

Ausblicke

Es finden sich naheliegende Möglichkeiten, um ausgehend vom vorliegenden Material weitere Themen zu behandeln.

Durch Einführung des Begriffs des normierten Vektorraumes und Übertragung der Begriffe kann der Banachsche Fixpunktsatz bewiesen werden.

Ausgehend von Beispiel 3.5 kann die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ behandelt werden.

[2] folgend können rein topologische Begriffe im Kontext metrischer Räume behandelt werden. Ausgehend von Aufgabe 9 kann die Menge der offenen ε-Kugeln als Basis der zugrundeliegenden Topologie eingeführt werden. Topologische Charakterisierungen der Stetigkeit und der Konvergenz sind dann einfach zu behandeln.

Eine interessante Verallgemeinerung des Kontraktionssatzes auf quasi-metrische Räume findet man in [3].

Literatur

[1] Th. Bröcker, *Analysis II*, BI, Mannheim, 1992

[2] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik, Ergänzende Kapitel*, Teubner, Leipzig, 1981

[3] J.J.M.M. Rutten, *Elements of Generalized Ultrametric Domain Theory*, CWI Report CS-R9507 (1995)