Spieltheorie

A. Chocholaty und P. Hitzler

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, wie Spiele mathematisch modelliert (Abschnitt 1) und mit Hilfe von Matrizen und Bäumen (Abschnitt 3) dargestellt und analysiert werden können. Für eine wichtige Klasse von Spielen, die der 2–Personen–Nullsummenspiele, wird ein zentraler Satz, das Minimaxprinzip, behandelt (Abschnitt 2).

1 Der Spielbegriff

Stellen wir uns eine Modelleisenbahnstrecke mit einer Anzahl Weichen vor. Sie soll ohne Schleifen gebaut sein, was bedeuten soll, dass ein nur vorwärts fahrender Zug an keiner Stelle zweimal vorbeikommen kann (Bild 1). Der Zug fährt an einer vorher festgelegten Startposition los und wird in jedem Fall irgendwann in einem Kopfbahnhof als Ziel halten. Die Schalter für die Weichen sind auf n Schaltpulte aufgeteilt. n Spieler bedienen jeder ein Schaltpult. In jedem Bahnhof liegt eine Liste, auf der steht, wie hoch der Gewinn oder Verlust jedes Spielers ist, wenn der Zug in diesem Bahnhof endet. Bevor der Zug losfährt, kann jeder der Spieler jeden Schalter seines Schaltpults beliebig einstellen. Die Schalterstellungen dürfen während der Fahrt des Zuges nicht mehr verändert werden.

Dieses anschauliche Modell beschreibt im Prinzip alles, was wir für unsere formale Definition eines Spiels brauchen:

Für ein Spiel benötigt man zunächst eine Anzahl von Spielern. Jeder Spieler verfolgt eine Spielstrategie, die er aus allen möglichen Strategien auswählt. Gewinn oder Verlust eines Spielers hängen also von den gewählten Strategien aller Spieler ab. Wir definieren wie folgt:

Definition 1
Ein n–Personen–Spiel *ist ein Tupel* $(I, S, \mathcal{F})$ *von Mengen* $I = \{1, \ldots, n\}$, $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ *und reellwertigen Funktionen* $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_n\}$, *so dass gilt:*

1. I *ist die endliche Menge der* Spieler.
2. *Für* $1 \leq i \leq n$ *ist* S_i *die Menge der* Strategien *des* i*–ten Spielers.*
3. F_i *ist die auf* S *erklärte* Auszahlungsfunktion (Gewinnfunktion) *des* i*–ten Spielers.*

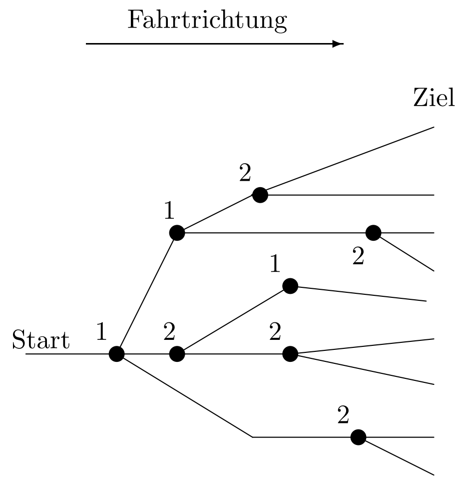

Abbildung 1: Eisenbahnstrecke, $n = 2$ Spieler

Die Einstellung des Schaltpults i entspricht einer bestimmten Strategie des Spielers i. Die Menge der möglichen Einstellungen auf dem Schaltpult i entspricht der Strategiemenge S_i des Spielers i. Sind alle Schaltpulte gestellt (d.h. jeder der Spieler hat eine Strategie gewählt), so steht der Spielverlauf (zurückgelegte Strecke), und damit der Spielausgang (Bahnhof, in welchem der Zug endet), fest. Auf den Listen sind für jeden Spielausgang (der durch die gewählten Strategien bestimmt ist) die Werte der Auszahlungsfunktionen für jeden Spieler verzeichnet.

Wir werden erst im Abschnitt 3 auf die Bedeutung einzelner Schalterstellungen (Weichen) eingehen, die Spielzügen entsprechen werden. Wir untersuchen zunächst die Abhängigkeit der Auszahlungsfunktion von den gewählten Strategien.

Im Falle $I = \{1, 2\}$ eines 2–Personen–Spieles wird die Auszahlungsfunktion oft mit Hilfe einer *Spielmatrix* angegeben:

			2	
		t_1	$\dots$	t_m
	s_1	(a_{11}, b_{11})	$\dots$	(a_{1m}, b_{1m})
1	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	s_n	(a_{n1}, b_{n1})	$\dots$	(a_{nm}, b_{nm})

Dabei sind $S_1 = \{s_1, \dots, s_n\}$, $S_2 = \{t_1, \dots, t_m\}$ und $F_1(s_i, t_j) = a_{ij}$, $F_2(s_i, t_j) = b_{ij}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$. Wählt also beispielsweise Spieler 1 die Strategie s_2 und Spieler 2 die Strategie t_4, so ist der Gewinn von Spieler 1 durch a_{24}, der von Spieler 2 durch b_{24} gegeben.

Welche seiner möglichen Strategien wird nun ein Spieler als „vernünftige“ Strategie verfolgen? Wir gehen davon aus, dass jeder Spieler versucht, seinen Gewinn zu maximieren, also eine Strategie wählt, durch die sein garantierter Mindestgewinn möglichst gross ist.

Wählt beispielsweise Spieler 1 im Falle eines 2–Personen–Spiels die Strategie $s \in S_1$, so beträgt sein Gewinn im ungünstigsten Falle $\min_{t \in S_2} \{F_1(s,t)\}$. Er wird also die Strategie s^* mit $\min_{t \in S_2} \{F_1(s^*,t)\}$ maximal wählen. Sein Gewinn beträgt dann mindestens

$$\max_{s \in S_1} \left\{ \min_{t \in S_2} \{F_1(s,t)\} \right\}.$$

Beispiel: Das *Gefangenendilemma (Prisoners Dilemma)* beschreibt die Situation zweier Gefangener, die eines schweren Vergehens angeklagt sind. Die Gefangenen werden getrennt verhört und haben jeder die Wahl, zu gestehen (Strategie s_1) oder nicht zu gestehen (Strategie s_2). Gesteht keiner, so werden beide wegen eines kleinen Vergehens (unerlaubter Waffenbesitz) verurteilt. Gestehen beide, so erhalten sie jeder eine schwere Strafe. Gesteht nur einer der beiden, so geht der Geständige straffrei aus (Kronzeugenregelung), der Ungeständige erhält eine besonders schwere Strafe. Die zugehörigen Auszahlungsfunktionen F_1 und F_2 sind in folgender Matrix dargestellt:

	s_1	s_2
s_1	$(-4,-4)$	$(0,-5)$
s_2	$(-5,0)$	$(-1,-1)$

Das Gefangenendilemma beschreibt den klassischen Konflikt zwischen kooperativem (kein Geständnis) und kompetetivem (Geständnis) Verhalten zweier Parteien.

Im Sinne der Gewinnmaximierung wird jeder der Angeklagten sich so verhalten, dass seine mögliche Höchststrafe minimal ist. Der Gefangene 1 wird also die Strategie s^* mit $\min_{t \in \{s_1,s_2\}} \{F_1(s^*,t)\}$ maximal wählen. Somit ist $s^* = s_1$. Es scheint also „vernünftig“ zu sein, sich kompetetiv zu verhalten. Folgt der Gefangene 2 demselben Gedankengang, so werden beide die schwere Strafe $F_1(s_1,s_1) = F_2(s_1,s_1) = -4$ erhalten.

2 2–Personen–Nullsummenspiele

In einem Nullsummenspiel gleichen sich Gewinne und Verluste der verschiedenen Spieler aus. Wir definieren allgemein:

Definition 2
Ein Spiel $(I,S,\mathcal{F})$ mit n Personen heisst Nullsummenspiel, *wenn für die Auszahlungsfunktionen $F_1,\ldots,F_n$ gilt: $\sum_{i=1}^n F_i(s) = 0$ für alle $s \in S$.*

In einem 2–Personen–Nullsummenspiel gewinnt Spieler 1 also genau das, was Spieler 2 verliert (oder umgekehrt). Daher bezeichnet man ein solches Spiel oft abkürzend mit (X, Y, F), wobei $X = S_1$, $Y = S_2$ und $F = F_1$ ist. Die Funktion F_2 ist durch $F_2(s) = -F_1(s)$ eindeutig bestimmt. Es genügt also, in der Spielmatrix die Funktion F anzugeben.

Haben alle Spieler eine Strategie gewählt, so kann die Situation vorliegen, dass keiner der Spieler durch die Wahl einer neuen Strategie seinen Gewinn vergrössern kann:

Definition 3
Sei $\mathcal{S} = (I, S, \mathcal{F})$ ein n–Personen–Spiel mit Strategiemengen $S_1, \ldots, S_n$ und Auszahlungsfunktionen $F_1, \ldots, F_n$. $s = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in S$ heisst ein Gleichgewichtspunkt *von $\mathcal{S}$, falls*

$$F_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma^*, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) \leq F_i(s)$$

für alle $i \in I$ mit $\sigma^* \in S_i$ gilt.

Für ein 2–Personen–Nullsummenspiel (X, Y, F) wird ein Gleichgewichtspunkt (x^*, y^*) oft als *Sattelpunkt* bezeichnet. Ein solcher ist gemäss Definition 3 definiert durch $F(x, y^*) \leq F(x^*, y^*)$ und $-F(x^*, y) \leq -F(x^*, y^*)$ für alle $x \in X$, $y \in Y$.

Der folgende Satz zeigt: Hat man in einem 2–Personen–Nullsummenspiel einen Sattelpunkt gefunden, so existiert kein weiterer Sattelpunkt mit echt grösserer oder echt kleinerer Auszahlung.

Satz 4
In einem 2–Personen–Nullsummenspiel (X, Y, F) seien (x, y) und (w, z) zwei Gleichgewichtspunkte. Dann ist $F(x, y) = F(w, z)$.

Beweis: (x, y) ist ein Gleichgewichtspaar, also gilt $F(w, y) \leq F(x, y)$. (w, z) ist ein Gleichgewichtspaar, also gilt $F(w, z) \leq F(w, y)$. Man erhält $F(w, z) \leq F(x, y)$ und analog $F(x, y) \leq F(w, z)$.

Ist (x^*, y^*) ein Sattelpunkt, so sind x^* bzw. y^* die für Spieler 1 bzw Spieler 2 im Sinne der Gewinnmaximierung „vernünftigen“ Strategien. Dies zeigt der folgende Satz:

Satz 5 (Minimaxprinzip)
Sei $\mathcal{S} = (X, Y, F)$ ein 2–Pesonen–Nullsummenspiel.
(a) *Dann sind äquivalent:*
(i) *$\mathcal{S}$ hat einen Sattelpunkt.*
(ii)

$$\max_{x \in X} \left\{ \min_{y \in Y} \{F(x, y)\} \right\} = \min_{y \in Y} \left\{ \max_{x \in X} \{F(x, y)\} \right\}$$

(b) *Ausserdem ist*

$$\max_{x\in X}\left\{\min_{y\in Y}\{F(x,y)\}\right\} = F(s)$$

für jeden Sattelpunkt s.

Wir beweisen zunächst folgendes

Lemma 6
Für jede Funktion $F : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$, X, Y Mengen, gilt

$$\max_{x\in X}\left\{\min_{y\in Y}\{F(x,y)\}\right\} \le \min_{y\in Y}\left\{\max_{x\in Y}\{(F(x,y)\}\right\}.$$

Beweis: Es ist

$$\min_{y\in Y}\{F(\hat{x},y)\} \le F(\hat{x},\hat{y}) \le \max_{x\in X}\{F(x,\hat{y})\}$$

für alle $\hat{x} \in X$, $\hat{y} \in Y$. Dies gilt auch für jenes $\hat{x}$, für das $\min_{y\in Y}\{F(\hat{x},y)\}$ maximal wird:

$$\max_{x\in X}\left\{\min_{y\in Y}\{F(\hat{x},y)\}\right\} \le \max_{x\in X}\{F(x,\hat{y})\},$$

und dies wiederum gilt auch für jenes $\hat{y}$, für das $\max_{x\in X}\{F(x,\hat{y})\}$ minimal wird:

$$\max_{x\in X}\left\{\min_{y\in Y}\{F(x,y)\}\right\} \le \min_{y\in Y}\left\{\max_{x\in X}\{F(x,y)\}\right\}.$$

Beweis von Satz 5: Zu (a):
(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei (x^*, y^*) ein Gleichgewichtspunkt. Dann gilt gemäss Definition und Lemma 6

$$\begin{aligned} F(x^*,y^*) &= \min_{y\in Y}\{F(x^*,y)\} \\ &\le \max_{x\in X}\left\{\min_{y\in Y}\{F(x,y)\}\right\} \\ &\le \min_{y\in Y}\left\{\max_{x\in Y}\{F(x,y)\}\right\} \\ &\le \max_{x\in X}\{F(x,y^*)\} \\ &= F(x^*,y^*) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.
(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sei $(x^*, y^*) \in X \times Y$ mit

$$F(x^*,y^*) = \max_{x\in X}\left\{\min_{y\in Y}\{F(x,y)\}\right\} = \min_{y\in Y}\left\{\max_{x\in Y}\{F(x,y)\}\right\}.$$

Dann ist $F(x^*, y^*) = \max_{x \in X} \{F(x, y^*)\} \geq F(x, y^*)$ für alle $x \in X$, und $F(x^*, y^*) = \min_{y \in Y} \{F(x^*, y)\} \leq F(x^*, y)$ für alle $y \in Y$. Somit ist (x^*, y^*) ein Gleichgewichtspunkt.
Zu (b): Die Behauptung folgt aus dem Beweis zu (a) und Satz 4.

Beispiel: Zwei Banken B, C haben in drei Städten s_1, s_2, s_3 zusammen einen konstanten Gesamtumsatz. Jede der Banken plant eine Filialengründung in einer der Städte. Die Auszahlungsfunktion F für B ist in folgender Matrix angegeben:

		C		
		s_1	s_2	s_3
	s_1	–20	–70	–20
B	s_2	130	30	90
	s_3	90	–10	30

Da (s_2, s_2) ein Sattelpunkt ist, werden sich beide Banken für die Gründung einer Filiale in s_2 entscheiden.

3 Positionsspiele

Bis jetzt wurden einzelne Züge während des Spiels ausser acht gelassen. Um diese berücksichtigen zu können, führen wir den Begriff des Spielbaums ein, mit dessen Hilfe wir dann definieren werden, was ein Positionsspiel ist.

In Ergänzung zu den Definitionen im Kapitel „Graphen" bezeichnen wir einen Wurzelbaum $T(E, K)$ mit Wurzel a durch $(T(E, K), a)$. Rekursiv definieren wir die *Nachfolgerfunktion* $N : E \to \mathcal{P}(E)$ durch:

1. $N(a)$ ist die Menge der Nachbarn der Wurzel a.

2. Für jede Ecke $f \in N(e)$ ist $N(f) := \{g \neq e \mid g \text{ ist Nachbar von } f\}$.

$N(e)$ heisst die Menge der *Nachfolger* von e. Die Nachfolger einer Ecke sind also die „nicht in Richtung der Wurzel" liegenden Nachbarn dieser Ecke. e heisst ein *Endpunkt* von T, falls $N(e) = \emptyset$. Ein *Pfad* ist ein Weg, der die Wurzel mit einem Endpunkt verbindet.

Definition 7
Ein Spielbaum *für ein n–Personen–Spiel $(I, S, \mathcal{F})$ ist ein Wurzelbaum $(T(E, K), a)$, ergänzt durch:*

1. *Die Auszahlungsfunktionen $F_1, \ldots, F_n$, die jedem Endpunkt von T je einen reellen Wert zuweisen.*

2. *Eine Zerlegung der Ecken von T, die keine Endpunkte sind, in n Mengen $I_1, \ldots, I_n$, den sogenannten Spielermengen.*

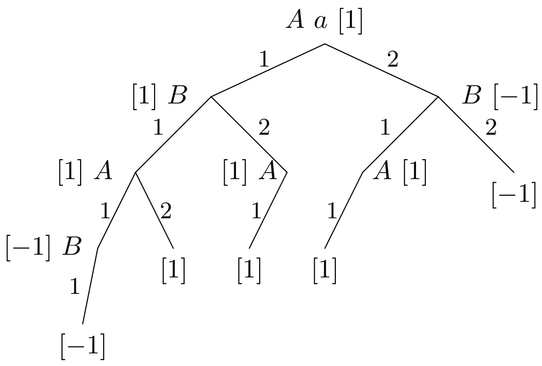

Abbildung 2: Spielbaum für Nim mit $n = 4$, $k = 2$.

Anschaulich entspricht die Wurzel des Baumes der „Anfangsposition“ des Spiels, jeder Endpunkt entspricht einer „Endposition.“ Jede Ecke von T entspricht einer der möglichen „Spielsituationen“ während des Spiels, in der ein Spieler einen „Zug“ (gemäss der von ihm im voraus gewählten Strategie) ausführen muss. Einem „Zug“ des Spielers i an einer Ecke aus der Spielermenge I_i entspricht die Auswahl genau eines Nachfolgers dieser Ecke.

Einer Strategie des Spielers i entspricht somit eine Funktion $\sigma : I_i \to E$ mit $\sigma(e) \in N(e)$, die also jedem Eckpunkt aus der Spielermenge I_i einen seiner Nachfolger zuordnet. Jedem $s \in S$ kann somit ein Pfad des Baumes zugewiesen werden.

Es sei erwähnt, dass das Eisenbahnmodell aus Abschnitt 1 anschaulich einen Spielbaum beschreibt. Ein einzelner Spielzug des Spielers i entspricht dort der Stellung einer einzelnen Weiche, die zum Schaltpult i gehört.

Beispiel: Beim Spiel *Nim* entnehmen zwei Spieler A und B einem Haufen von n Streichhölzern abwechselnd jeweils mindestens eines und höchstens k Streichhölzer ($k < n$, $k, n \in \natural$ fest). Der Spieler, der das letzte Streichholz wegnimmt, gewinnt.

Für $n = 4$, $k = 2$ kann das Spiel durch den Spielbaum in Bild 2 dargestellt werden. Nim ist ein 2–Personen–Nullsummenspiel, die Auszahlungsfunktion F für Spieler A nimmt nur die Werte 1 (Gewinn) oder -1 (Verlust) an.

Das Spiel beginnt bei der Wurzel a mit Spieler A am Zug. Die Auswahl des linken Nachfolgers entspricht der Wegnahme von einem, die Auswahl des rechten Nachfolgers der Wegnahme von zwei Streichhölzern. Danach ist Spieler B mit denselben Zugmöglichkeiten an der Reihe usw.

Durch Abzählen findet man je 4 Strategien für jeden der Spieler. Anstatt diese Strategien und die zugehörige Auszahlungsfunktion in einer Matrix darzustellen, was für grössere n und k schnell unhandlich wird, suchen wir eine andere Möglichkeit, das Spiel zu analysieren.

Offensichtlich ist es für einen Spieler, etwa A, ratsam, immer genau so viele Hölzchen wegzunehmen, dass eine Anzahl liegenbleibt, die ein Vielfaches von $k+1$ ist. Der Gegner kann dann im darauffolgenden Zug das Spiel keinesfalls beenden, und im Gegenzug kann dann von Spieler A wieder ein Vielfaches von $k+1$ Hölzchen im Haufen hergestellt werden, was erneut den Gewinn von Spieler B im darauffolgenden Zug verhindert. Früher oder später wird durch diese Vorgehensweise Spieler A gewinnen.

Man kann also die Ecken des Spielbaums in Gewinn– und Verlustecken unterteilen, je nachdem, ob bei vernünftigem Verhalten beider Spieler von einer Ecke aus ein Gewinn für Spieler A möglich ist oder nicht. Gewinnecken sind in Bild 2 mit [1], Verlustecken mit $[-1]$ gekennzeichnet. Wie man sieht, kann sich Spieler A den Gewinn auf jeden Fall sichern.

Allgemein nennt man eine solche Strategie, die einem Spieler den Gewinn garantiert, eine *Gewinnstrategie* für diesen Spieler.

Nim ist ein Beispiel für ein Positionsspiel:

Definition 8
Ein Spielbaum mit Spielermengen I_1, I_2 eines 2–Personen–Nullsummenspiels (X, Y, F) heisst ein Positionsspiel, *falls gilt:*

1. *Die Auszahlungsfunktion F nimmt nur die Werte 1, 0, -1 an.*
2. *$N(e) \subseteq I_2$ für alle $e \in I_1$ und $N(f) \subseteq I_1$ für alle $f \in I_2$*

Die durch folgende Definition eingeführte Funktion gibt an, welchen Ausgang des Spiels Spieler 1 bei optimaler Wahl der Spielzüge beider Spieler erwarten kann.

Definition 9
Sei $(T(E, K), a)$ ein Positionsspiel mit Spielermengen I_1, I_2 und Auszahlungsfunktion F. Dann sei die Bewertungsfunktion $\omega : E \to \{-1, 0, 1\}$ *rekursiv definiert durch:*

1. *$\omega(e) := F(e)$ für alle Endpunkte e von T.*
2. $\omega(e) := \begin{cases} \max_{f \in N(e)}\{\omega(f)\} & \text{für } e \in I_1 \\ \min_{f \in N(e)}\{\omega(f)\} & \text{für } e \in I_2 \end{cases}$

Wendet man ω auf unser Beispiel in Bild 2 an, so erhält man die gleichen Bewertungen der Ecken wie in der vorangegangenen Analyse.

Der Wert, den die Bewertungsfunktion dem Anfangspunkt zuweist, ist das Spielergebnis, das sich Spieler 1 durch entsprechende Wahl seiner Spielzüge immer sichern kann. Mehr braucht ihm Spieler 2 jedoch nicht zu gestatten. Die Konstruktion von ω garantiert Spieler 1 im Anfangspunkt eine Nachfolgerecke mit einer gleich hohen Bewertung. Spieler 2 kann, wiederum aufgrund der Konstruktion der Bewertungsfunktion, keine unmittelbar folgende Ecke finden, die eine geringere (das heisst für ihn günstigere) Bewertung hat. Die gleiche Schlussweise setzt sich fort, bis ein Endpunkt des Spielbaums erreicht ist.

Aus der Konstruktion der Bewertungsfunktion und den obigen Überlegungen folgen sofort die folgenden beiden Sätze. Es sei dazu noch bemerkt, dass auch Spiele wie Schach oder Go Positionsspiele sind.

Satz 10
Nimmt die Auszahlungsfunktion eines Positionsspiels nur die Werte -1 *oder* 1 *an, so existiert für einen der beiden Spieler eine Gewinnstrategie.*

Satz 11
Hat bei einem Positionsspiel keiner der beiden Spieler eine Gewinnstrategie, so endet das Spiel bei optimalen Zügen beider Spieler untentschieden, das heisst die Auszahlung ist für beide Spieler 0.